

**Jacek Cink**

**STEROWANIE OPTYMALNE MASZYN DŹWIGOWYCH**

(praca habilitacyjna)

**Łódź, 2001 r.**



## SPIS TREŚCI

	Strona
<b>SPIS OZNACZEŃ POWTARZAJĄCYCH SIĘ WIELKOŚCI</b> .....	1
<b>STRESZCZENIE</b> .....	3
<b>1. CEL, TEZA I ZAKRES PRACY.</b> .....	5
<b>2. WSTĘP.</b> .....	9
<b>2.1. Sformułowanie zadania sterowania optymalnego.</b> ..	11
<b>2.2. Zagadnienie sterowania optymalnego         w postaci ciągłej.</b> .....	13
<b>2.3. Zagadnienie sterowania optymalnego         w postaci dyskretnej.</b> .....	17
<b>3. ADAPTACJA METODY OPTIMALIZACJI.</b> .....	23
<b>3.1. Zależność analityczna między wektorem stanu         i ciągiem impulsów sterujących.</b> .....	24
<u>3.1.1. Ruch swobodny układu.</u> .....	24
<u>3.1.2. Ruch układu poddanego działaniu                 pojedynczego impulsu sterującego.</u> .....	25
<u>3.1.3. Ruch układu poddanego działaniu                 dowolnego sterowania.</u> .....	27
<b>3.2. Zadanie sterowania optymalnego         jako wynik optymalizacji statycznej.</b> .....	29
<u>3.2.1. Obszar rozwiązań dopuszczalnych.</u> .....	30
<u>3.2.2. Wskaźnik jakości sterowania.</u> .....	33
<b>3.3. Metoda optymalizacji.</b> .....	35
<u>3.3.1. Składowe wektora gradientu.</u> .....	37
<u>3.3.2. Rzutowanie wektora największego spadku.</u> .....	38
<b>3.4. Przykład zastosowania metody.</b> .....	46
<b>3.5. Analityczne wyznaczenie optymalnych funkcji sterujących         dla prostych układów liniowych II rzędu.</b> .....	62

<b>4. OPTIMALIZACJA ROZRUCHU WCIĄGARKI Z NAPĘDEM HYDROSTATYCZNYM. ....</b>	<b>69</b>
4.1. Model dynamiczny mechanizmu. ....	71
4.2. Optymalizacja rozruchu „z powietrza”. ....	78
4.3. Optymalizacja rozruchu „z podłoża”. ....	83
4.4. Podsumowanie. ....	90
<b>5. OPTIMALIZACJA RUCHU ROBOCZEGO MECHANIZMU JAZDY MOSTU SUWNICY Z NAPĘDEM HYDROSTATYCZNYM. ....</b>	<b>91</b>
5.1. Model dynamiczny mechanizmu. ....	92
5.2. Optymalny przebieg funkcji sterującej przy hamowaniu. ....	102
5.3. Optymalny przebieg funkcji sterującej przy rozruchu i hamowaniu. ....	109
5.4. Optymalny sposób sterowania w ruchu roboczym. ..	116
5.5. Bilans energetyczny ruchu roboczego. ....	120
5.6. Sterowanie optymalne przy małych przemieszczeniach. ....	122
5.7. Podsumowanie. ....	127
<b>6. OPTIMALNE STEROWANIE MECHANIZMEM JAZDY MOSTU SUWNICY POMOSTOWEJ Z NAPĘDEM FALOWNIKOWYM. ....</b>	<b>129</b>
6.1. Układy regulacji prędkości i przemieszczenia oraz ich modele. ....	130
6.2. Stanowisko do badań eksperymentalnych mechanizmu jazdy mostu suwnicy. ....	134
6.3. Model dynamiczny mechanizmu jazdy mostu suwnicy. ....	140
6.4. Model dynamiczny zawieszoności na linach ładunku. ....	148
6.4.1. Model ładunku jako wahadła matematycznego. ...	149
6.4.2. Model uwzględniający ruch płaski ładunku. ....	150
6.5. Model dynamiczny mechanizmu jazdy mostu suwnicy wraz z układem sterowania i regulacji położenia. ....	152
6.6. Optymalny przebieg funkcji sterującej w ruchu roboczym. ....	153
6.7. Badania symulacyjne i eksperymentalne. ....	157
6.8. Podsumowanie. ....	165

<b>7. OPTYMALNE STEROWANIE RUCHAMI SKOJARZONYMI SUWNICY PRZY TRANSPORCIE POZIOMYM ŁADUNKU. ...</b>	<b>167</b>
7.1. Koncepcja transportu poziomego. ....	167
7.2. Model dynamiczny ładunku dla transportu w płaszczyźnie poziomej. ....	171
7.3. Badania symulacyjne i eksperymentalne. ....	174
7.4. Podsumowanie. ....	177
<b>8. OPTYMALIZACJA TRANSPORTU ŁADUNKU W RUCHU ROBOCZYM ŻURAWIA PORTOWEGO. ....</b>	<b>179</b>
8.1. Koncepcja sterowania skojarzonymi ruchami mechanizmów obrotu i wypadu. ....	181
8.2. Analiza obciążeń i parametry żurawia w ruchu obrotowym i wypadowym. ....	182
8.3. Układy napędowe i sterownicze. ....	189
8.3.1. Falownikowy układ napędowy mechanizmu obrotu. ....	190
8.3.2. Falownikowy układ napędowy mechanizmu wypadu. ....	191
8.3.3. Hydrostatyczny układ napędowy mechanizmu obrotu. ....	191
8.3.4. Hydrostatyczny układ napędowy mechanizmu wypadu. ....	193
8.3.5. Układy sterownicze. ....	194
8.4. Model dynamiczny ruchów skojarzonych obrotu i wypadu. ....	196
8.4.1. Model elektromechanicznego mechanizmu obrotu. ....	196
8.4.2. Model hydrostatycznego mechanizmu obrotu. ....	200
8.4.3. Model elektromechanicznego mechanizmu wypadu. ....	204
8.4.4. Model hydrostatycznego mechanizmu wypadu. ....	209
8.4.5. Modele układów sterowniczych. ....	213
8.4.6. Modele zawieszoności na linach ładunku. ....	214
8.4.7. Model ruchów skojarzonych obrotu i wypadu. ....	217
8.5. Optymalna funkcja sterująca w ruchu roboczym. ....	218
8.6. Badania symulacyjne. ....	223
8.7. Podsumowanie. ....	228
<b>9. WNIOSKI KOŃCOWE. ....</b>	<b>231</b>
<b>LITERATURA</b> .....	<b>235</b>
<b>SUMMARY</b> .....	<b>243</b>
<b>CHARAKTERYSTYKA ZAWODOWA AUTORA</b> .....	<b>245</b>

Sterowanie optymalne maszyn dźwigowych.

---

## SPIS OZNACZEŃ POWTARZAJĄCYCH SIĘ WIELKOŚCI

A [m <sup>2</sup> ]	- powierzchnia czynna tłoka lub powierzchnia zastępcza,
a [m <sup>5</sup> ·N <sup>-1</sup> ·s <sup>-1</sup> ]	- współczynnik natężenia przepływu nieszczelności wewnętrznych,
B [N]	- siła bezwładności (d'Alamberta),
c [m <sup>5</sup> ·N <sup>-1</sup> ]	- pojemność hydrauliczna (kapacytancja),
c <sub>1,2</sub> [N·m <sup>-1</sup> ]	- sztywność liniowa elementu sprężystego,
D [m]	- średnica elementu mechanicznego (koła, bębna itp.),
E [J]	- energia,
F [N]	- siła sprężystości,
f <sub>1,2</sub> [N·m <sup>-1</sup> ·s]	- współczynnik tłumienia wiskotycznego,
g = 9,81 [m·s <sup>-2</sup> ]	- przyśpieszenie ziemskie,
H [N]	- siła pozioma,
h [s]	- krok całkowania,
i [-]	- przełożenie układu,
I [kg m <sup>2</sup> ]	- masowy moment bezwładności elementu lub zredukowany układu,
l [xx]	- wskaźnik jakości sterowania,
k [xx]	- stałe lub współczynniki wzmocnienia,
L [J]	- praca,
m [kg]	- masa elementu lub masa zredukowana układu,
M [Nm]	- moment napędowy lub moment oporu,
N [W]	- moc,
p [m·s <sup>-2</sup> ]	- przyśpieszenie liniowe,
p [Pa]	- ciśnienie lub różnica ciśnień,
Q [m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> ]	- wydatek objętościowy,
q <sub>p,s</sub> [m <sup>3</sup> ·rad <sup>-1</sup> ]	- objętość jednostkowa (pompy, silnika),
R [m]	- promień lub promień zastępczy,
R [N]	- siła oporu lub tłumienia,
S [N]	- siła,
t [s]	- czas,

$T$ [s]	- stała czasowa,
$U$ [V]	- napięcie,
$\mathbf{u}$	- wektor wielkości sterujących,
$u$	- zmienne sterujące,
$v$ [ $m \cdot s^{-1}$ ]	- prędkość liniowa,
$W$ [xx]	- wskaźnik jakości sterowania,
$W$ [N]	- opory ruchu,
$\mathbf{x}$	- wektor zmiennych stanu,
$x_{1,2}$	- zmienne stanu, przemieszczenia poziome,
$\mathbf{y}$	- wektor wielkości wyjściowych,
$Z$ [N]	- siła zredukowana do siłownika wypadu żurawia,
$\eta$ [-]	- sprawność,
$\Delta$ [m]	- odchylenie położenia,
$\omega$ [ $rad \cdot s^{-1}$ ]	- prędkość kątowna,
$\varepsilon$ [ $rad \cdot s^{-2}$ ]	- przyśpieszenie kątowne,
$\varepsilon$ [xx]	- uchyb,
$\alpha$ [rad]	- kąt obrotu żurawia,
$\varphi$ [rad]	- kąt obrotu,
$\tau$ [s]	- stała czasowa,
$\Phi$	- obszar rozwiązań dopuszczalnych.



## STEROWANIE OPTYMALNE MASZYN DŹWIGOWYCH

### STRESZCZENIE

Przedstawiona praca habilitacyjna dotyczy sposobów wyznaczania sterowań optymalnych maszyn dźwigowych oraz ich mechanizmów. Poszukiwane są takie przebiegi czasowe funkcji sterujących, które minimalizują bądź obciążenia maksymalne, bądź drgania elementów mechanizmu.

Praca składa się z dwóch zasadniczych części. W pierwszej – obejmującej rozdziały 2 i 3 – opisano istotę zaproponowanej metody optymalizacji i sposób jej adaptacji dla rozwiązywania problemów inżynierskich. W części drugiej – obejmującej rozdziały 4, 5, 6, 7 i 8 – pokazano wyniki badań symulacyjnych i eksperymentalnych przy zastosowaniu sterowań optymalnych dla poszczególnych mechanizmów dźwignic oraz ich ruchów skojarzonych. Opracowanie kończą wnioski końcowe zawarte w rozdziale 9.

W pracy zaproponowano i opisano metodę optymalizacji, która umożliwia znalezienie sterowań optymalnych dźwignic. Metoda jest deterministyczna, stosunkowo prosta i wymagająca średniej klasy sprzętu komputerowego. Zaadaptowanie metody do rozwiązania konkretnego zadania optymalizacji wymaga dobrego, najlepiej zweryfikowanego eksperymentem, modelu liniowego mechanizmu lub maszyny.

Optymalizację zastosowano do poszukiwania sterowania optymalnego rozruchem wciągarki hydrostatycznej, co w efekcie umożliwiło zmniejszenie obciążeń maksymalnych mechanizmu o około 20 %.

Omówiona w pracy metoda optymalizacji umożliwiła opracowanie optymalnego sposobu sterowania dla całej grupy mechanizmów realizujących transport poziomy wiotko zawieszzonego na linach ładunku.

Na przykładzie hydrostatycznego mechanizmu jazdy mostu suwnicy pomostowej pokazano sposób wyznaczania optymalnej funkcji sterującej prędkością w całym ruchu roboczym dla ruchu w jednym kierunku.

Procedurę optymalizacyjną zastosowano również do mechanizmu jazdy mostu rzeczywistej suwnicy pomostowej zaopatrzonej w indywidualne napędy elektromechaniczne zasilane z elektroenergetycznych przetwornic częstotliwości (falowników). Układy sterowania mechanizmów zaopatrzone zostały w podukłady regulacji prędkości i położenia. Uzyskano efekty w postaci wy tłumienia wahań ładunku po okresach rozruchu i hamowania oraz jego pozycjonowanie z dużą dokładnością w zadanym położeniu.

W oparciu o wyniki badań mechanizmu jazdy mostu opracowano koncepcję transportu poziomego ładunku przy skojarzonych ruchach mostu i wózka suwnicy.

Rozwiązany został problem poziomego transportu ładunku dla maszyn o ruchach obrotowych i wypadowych. Dla portowego żurawia wypadowego opracowano metodę takiego kojarzenia prędkości mechanizmu obrotu i wypadu, które zapewnia ruch krążka szczytowego żurawia, a zatem także ładunku wzdłuż linii prostej poziomej. Zastosowanie dodatkowo sterowania optymalnego umożliwia wy tłumienie wahań ładunku po okresach rozruchu i hamowania, jak również pozycjonowanie ładunku z wysoką dokładnością w zadanym punkcie pola pracy.

## 1. CEL, TEZA I ZAKRES PRACY.

Gwałtowny rozwój techniki obserwowany w ostatnich czasach zaowocował pojawieniem się nowej generacji maszyn oraz ich mechanizmów.

W mechanizmach dźwignic napędzanych tradycyjnie silnikami elektrycznymi asynchronicznymi coraz większe zastosowanie znajdują elektroenergetyczne przetwornice częstotliwości, zwane potocznie falownikami. Mogą one współpracować z prostymi silnikami klatkowymi i umożliwiają płynne sterowanie prędkością mechanizmu. Cecha ta jest niezwykle pożyteczna, wręcz niezbędna przy automatyzacji sterowania ruchami roboczymi maszyn dźwigowych. Dotychczas własności takie posiadały jedynie układy napędowe z silnikami prądu stałego lub napędy hydrostatyczne zasilane pompami o zmiennej objętości jednostkowej.

Przetwornice częstotliwości oraz współczesne przekładnie hydrostatyczne sterowane są za pomocą sygnałów elektrycznych, które w postaci analogowej lub cyfrowej mogą być przesyłane na odległość. Z kolei rozwój techniki mikroprocesorowej pozwala na budowę układów przyjmujących, przetwarzających i wydających sygnały w czasie rzeczywistym. Umożliwia to budowę stosunkowo złożonych układów sterowania i regulacji współpracujących z mechanizmami dźwignic. Celem budowy takich układów jest podniesienie jakości eksploatacyjnej maszyn dźwigowych oraz ich automatyzacja.

Rzeczywisty rozwój techniki mikroprocesorowej pozwala na szybkie wygenerowanie funkcji sterujących ruchami roboczymi mechanizmów i wydanie ich w czasie rzeczywistym. Obliczone funkcje sterujące mogą być podporządkowane minimalizacji zdefiniowanych wcześniej kryteriów jakości, realizujących konkretne cele. Mamy wówczas do czynienia ze sterowaniem optymalnym.

Główne problemy, jakie można rozwiązać przy zastosowaniu sterowania optymalnego do współczesnych układów napędowych i sterowniczych w mechanizmach dźwignic, są następujące.

- Zmniejszenie obciążeń maksymalnych w elementach mechanizmów w ruchach nieustalonych.

- Wy tłumienie wahań wiotko podwieszono na linach ładunku przy jego transporcie poziomym.
- Pozycjonowanie ładunków przenoszonych za pomocą dźwignic zarówno przy transporcie pionowym, jak i poziomym.
- Likwidacja kąta ukosowania oraz eliminacja tarcia obrzeży mostów i bram suwnic.

Firmy światowe budujące dźwignice rozwiązują wymienione wyżej problemy sobie znanymi sposobami. Istnieje duża trudność w dotarciu do informacji na ten temat ze względu na obowiązującą tajemnicę firmy. Z dostępnych danych wiadomo na przykład, że tłumienia wahań zawieszono na linach ładunku przy transporcie poziomym dokonuje się przy wykorzystaniu sprzężenia zwrotnego od jego wychylenia. Taki sposób rozwiązania problemu stwarza trudności przy pozycjonowaniu ładunku, wymaga bowiem wykonywania dostawczych ruchów nawrotnych. Pomiar wychylenia ładunku oraz pomiar położenia dźwignicy na torze dokonywany jest na ogół za pomocą bardzo drogich optycznych urządzeń laserowych.

#### **Cel pracy.**

**Celem zaprezentowanej pracy jest określenie metod poszukiwania optymalnych sposobów sterowania ruchami roboczymi maszyn dźwigowych. Znalezione optymalne funkcje sterujące oraz zaproponowane układy sterowania i regulacji, będące produktem własnej myśli technicznej, umożliwiają rozwiązanie sformułowanych wyżej, podstawowych problemów transportu ładunków za pomocą dźwignic.**

Dla poszukiwań optymalnych sterowań mechanizmów dźwignic niezbędna jest znajomość ich modeli dynamicznych i matematycznych. W zaprezentowanej pracy obroniona została teza, którą można sformułować następująco.

#### **Teza pracy.**

Dysponując liniowym modelem dynamicznym mechanizmu oraz średniej klasy sprzętem komputerowym, można, stosując odpowiednią deterministyczną metodę optymalizacji, znaleźć optymalną funkcję sterującą ruchem roboczym mechanizmu, spełniającą założone kryterium jakości.

#### Zakres pracy.

W niniejszej pracy przedstawiona została metoda poszukiwania optymalnych sterowań mechanizmów maszyn roboczych, której fragmenty zaprezentowane zostały w publikacjach [24], [26], [28]. Metoda zastosowana została przy wykorzystaniu opracowanych wcześniej w Zakładzie Maszyn Roboczych i Napędów Hydraulicznych Politechniki Łódzkiej modeli dynamicznych mechanizmów. Przeprowadzone badania symulacyjne obejmują:

- rozruch mechanizmu podnoszenia z napędem hydrostatycznym,
- ruch roboczy mechanizmu jazdy mostu suwnicy z napędem hydrostatycznym,
- ruch roboczy mechanizmu jazdy mostu suwnicy z napędem elektromechanicznym z układem regulacji przemieszczenia,
- skojarzone ruchy mechanizmów jazdy mostu i wózka suwnicy pomostowej,
- skojarzone ruchy mechanizmów obrotu i wypadu żurawia portowego.

Modele mechanizmów podnoszenia oraz jazdy mostu suwnicy zostały zweryfikowane eksperymentalnie. W przypadku mechanizmu jazdy mostu z napędem elektromechanicznym z układem regulacji przemieszczenia oraz w przypadku skojarzonych ruchów mostu i wózka również badania optymalizacyjne zostały potwierdzone eksperymentem. W pozostałych przypadkach wyznaczone sterowania optymalne zweryfikowane zostały za pomocą badań symulacyjnych.

W pracach prowadzonych w Zakładzie opracowane zostały modele dynamiczne wszystkich mechanizmów dźwignic, obejmujące zarówno ich części napędowe, jak i mechaniczne.

W pracach [4] i [28] przedstawione są modele dynamiczne mechanizmu podnoszenia z napędem hydrostatycznym dla różnych przypadków rozruchu oraz całego ruchu roboczego. Rozwiązania modeli oraz badania symulacyjne dokonane zostały przy użyciu techniki analogowej, a modele zostały zweryfikowane eksperymentem. Model dynamiczny elektrohydraulicznego mechanizmu jazdy mostu suwnicy pomostowej zamieszczony został w pracach [25] i [55], natomiast praca [53] zawiera model mechanizmu jazdy mostu suwnicy z napędem elektromechanicznym z układem pozycjonowania i kompensacji ukosowania. Ten ostatni układ został zweryfikowany eksperymentalnie. Praca [54] zawiera model oraz badania symulacyjne i eksperymentalne skojarzonych ruchów mostu i wózka suwnicy pomostowej. Modele mechanizmów obrotu i wypadu żurawia portowego pokazane są w pracach [55] i [66]. Model dla skojarzonych ruchów obu tych mechanizmów opisany jest w pracy [56].

Dla celów poszukiwania sterowań optymalnych użyte modele zostały zlinearyzowane i uproszczone do postaci, która umożliwia zastosowanie zaadaptowanej, zaprezentowanej poniżej metody optymalizacji. W przypadku konieczności zastosowania opisu nieliniowego przyjęto metodę wyznaczania sterowania optymalnego dla modelu uproszczonego, które potem stosowano jako wymuszenie dla modelu pełnego nieliniowego.

W opracowaniu wszystkich wymienionych wyżej modeli dynamicznych mechanizmów dźwignic autor miał swój znaczący udział.

Natomiast adaptacja i opracowanie metody wyznaczania sterowań optymalnych dla maszyn dźwigowych (rozdział 3) oraz badania optymalizacyjne stanowią samodzielne osiągnięcie autora.

## 2. WSTĘP.

Modelowanie dynamiczne oraz badania symulacyjne układów rzeczywistych umożliwiają ocenę ich własności dynamicznych i eksploatacyjnych. Dotyczy to mechanizmów i maszyn już istniejących, jak również będących w fazie projektowania. Rozwój cyfrowej techniki obliczeniowej umożliwia szybkie rozwiązywanie nawet stosunkowo złożonych nieliniowych modeli dynamicznych maszyn i mechanizmów. Spośród różnych sposobów opisu matematycznego modeli na wyróżnienie zasługuje, powszechnie spotykany w literaturze i praktyce dla układów o parametrach skupionych, opis w przestrzeni zmiennych stanu. Został on zapożyczony z opisów układów automatyki i dzięki licznym zaletom znalazł swoje miejsce w opisach matematycznych modeli mechanizmów i całych maszyn roboczych. Jak wiadomo, opis ten wymaga dokonania wyboru tzw. zmiennych stanu, stanowiących najmniej liczny zbiór zmiennych w czasie wielkości fizycznych, których znajomość umożliwia ocenę zachowania układu dynamicznego w danej chwili oraz w przyszłości. Klasyczny opis w przestrzeni zmiennych stanu zawiera dwa równania wektorowe; równanie stanu oraz równanie wyjścia w postaci (2.1).

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  - n - wymiarowy wektor zmiennych stanu,

$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$  - m - wymiarowy wektor zmiennych wyjściowych,

$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T$  - r - wymiarowy wektor sterowania,

$\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$  - wektor funkcji równań stanu,

$\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_m]^T$  - wektor funkcji równań wyjścia,

znak  $[ ]^T$  - oznacza transpozycję.

Zbiór zmiennych stanu nazywany jest umownie wektorem zmiennych stanu, którego składowymi są zmienne stanu. Pojęcie wektora stanu nie odpowiada klasycznej definicji matematycznej, ponieważ zmienne stanu są różnymi wielkościami fizycznymi i posiadają różne miana. Podobne umowne określenia dotyczą wektorów zmiennych sterujących, wyjściowych oraz funkcji występujących w równaniach (2.1).

Ważną grupę modeli dynamicznych stanowią modele liniowe stacjonarne, tzn. takie, w których prawe strony równań stanu i wyjścia są formami liniowymi zmiennych stanu i sterowania, a parametry układu nie zależą od czasu, czyli współczynniki równań są stałe. Opis matematyczny modelu liniowego stacjonarnego w przestrzeni zmiennych stanu przyjmuje w zapisie wektorowo - macierzowym postać (2.2).

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$$

$\mathbf{A} [n \times n]$ ,  $\mathbf{B} [n \times r]$ ,  $\mathbf{C} [m \times n]$ ,  $\mathbf{D} [m \times r]$  - macierze

współczynników równań stanu i wyjścia.

Szczególne znaczenie posiada macierz  $\mathbf{A}$ , która decyduje o wartościach własnych układu, determinujących częstotliwości drgań układu swobodnego, tzn. pozbawionego sterowania (wymuszenia).

Stosowanie modeli liniowych jest korzystne z uwagi na łatwość i szybkość uzyskania rozwiązań będących odpowiedzią na zadane wymuszenia, ocenę stabilności i innych własności dynamicznych oraz możliwości zastosowania omówionych poniżej metod wyznaczania sterowań optymalnych. Złożone układy dynamiczne z natury rzeczy są nieliniowe i posiadają wiele parametrów. Ich rozwiązanie jest oczywiście możliwe przy zastosowaniu współczesnych technik obliczeniowych, jednak duża liczba parametrów wymaga prowadzenia żmudnej analizy parametrycznej w celu ustalenia hierarchii ich ważności. Dlatego istnieje tendencja do upraszczania modeli dynamicznych poprzez ich linearyzację oraz uwzględnienie jedynie tych parametrów i zmiennych, które mają decydujący wpływ na zachowanie dynamiczne układów rzeczywistych. Działania powyższe powinny być przeprowadzone w oparciu o analizę teoretyczną oraz weryfikację eksperymentalną rzeczywistych maszyn, mechanizmów i ich elementów.



## 2.1. Sformułowanie zadania sterowania optymalnego.

Spośród dostępnych w literaturze opisów sterowania optymalnego, jako stosunkowo przejrzysty wybrano sposób przedstawienia problemu zamieszczony w pracy [31]. Zadanie sterowania optymalnego, zwane również zadaniem optymalizacji dynamicznej, sformułowane jest następująco.

Niech dany będzie obiekt dynamiczny opisany wektorowym równaniem stanu postaci (2.3).

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.3)$$

Zakłada się, że:

- składowe  $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) wektora  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  są funkcjami ciągłymi zmiennych  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $t$  oraz mają ciągłe pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ),
- wszystkie składowe  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) wektora stanu  $\mathbf{x}$  są dostępne.

Na składowe  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) wektora sterowania  $\mathbf{u}$  nakłada się ograniczenia, np. aby funkcje  $u_i(t)$  były ciągłymi funkcjami czasu lub aby były funkcjami ograniczonymi  $|u_i(t)| \leq u_{\max}$  w przedziale czasu  $\langle 0, t_k \rangle$ , gdzie  $t_k$  jest czasem trwania sterowania. Ogólnie wymaga się, aby wektor sterowania  $\mathbf{u}$  należał do zbioru sterowań dopuszczalnych  $U$  ( $\mathbf{u} \in U$ ).

Niech dany będzie wskaźnik jakości sterowania w postaci:

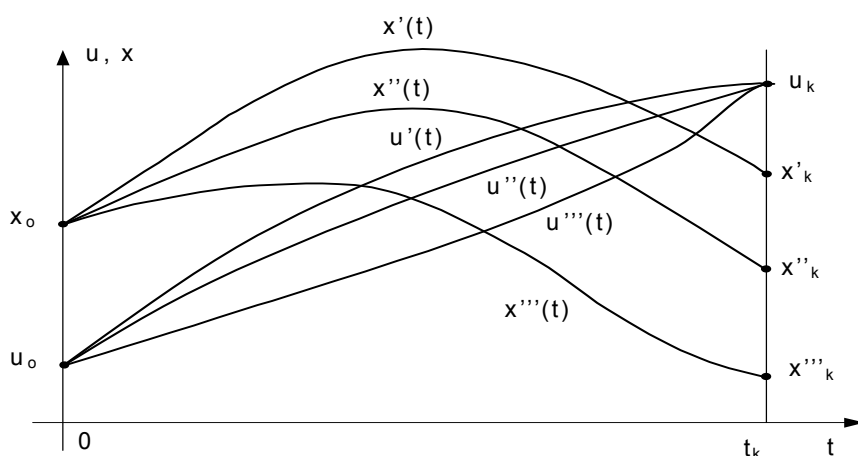
$$I(\mathbf{u}) = g_0(\mathbf{x}_k) + \int_0^{t_k} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \cdot dt \quad (2.4)$$

- składnik  $g_0(\mathbf{x}_k)$  nazywany jest skalarną funkcją stanu końcowego,
- składnik  $\int_0^{t_k} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \cdot dt$  nazywany jest skalarną funkcją strat chwilowych.

Sterowaniem optymalnym  $\hat{\mathbf{u}}$  jest takie sterowanie dopuszczalne  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{u} \in U$ ), które minimalizuje wskaźnik jakości (2.4).

$$I(\hat{u}) = \min_{u \in U} I(u) \quad (2.5)$$

Na trajektorię stanu  $x$  oraz czas trwania sterowania  $t_k$  nakłada się często dodatkowe warunki. Trajektorię stanu nazywa się umownie tor, jaki zakreśla w przestrzeni zmiennych stanu koniec wektora stanu. Ograniczenia nałożone na zmienne stanu wynikają najczęściej z własności fizycznych maszyny, której model jest rozpatrywany. Czas trwania sterowania  $t_k$  może być zadany lub swobodny, tzn. wyznaczony z warunków minimalizacji wskaźnika (2.4).



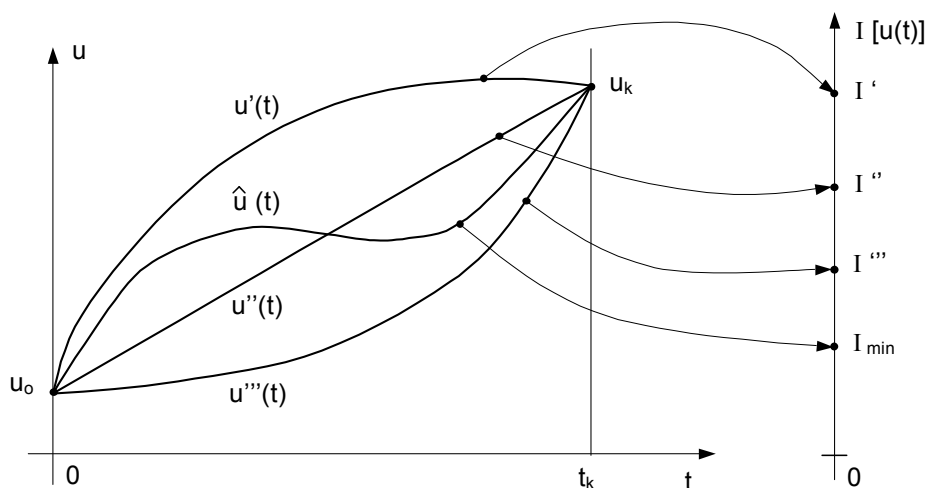
Rys. 2.1. Przykładowe przebiegi czasowe jednej ze zmiennych sterujących i stanu dla zadanego czasu sterowania i swobodnego stanu końcowego.

W niniejszej pracy rozważone zostały takie przypadki sterowania optymalnego, w których stan początkowy układu  $x_0$  jest zadany, stan końcowy  $x_k$  jest swobodny oraz znany jest czas trwania sterowania  $t_k$ , czyli zadana jest jego chwila końcowa. Dodatkowo na wektor sterowania nałożono wymagania, aby jego wartość w chwili początku  $t_0$  i końca  $t_k$  sterowania miała zadaną wartość, odpowiednio  $u_0$  i  $u_k$ . Na rys. 2.1 pokazano przykładowe przebiegi czasowe jednej ze zmiennych sterujących i odpowiadające im przebiegi jednej ze zmiennych stanu dla rozpatrywanych w pracy przypadków optymalizacji.

## 2.2. Zagadnienie sterowania optymalnego w postaci ciągłej.

Przedstawione powyżej zagadnienie sterowania optymalnego opisane zostało w postaci ciągłej, co oznacza, że wszystkie zmienne wielkości fizyczne są ciągłymi funkcjami czasu.

Analityczne rozwiązanie zadania sterowania optymalnego w tej postaci jest skomplikowane, a przy układach nieliniowych wyższych rzędów - wręcz niemożliwe. W ogólnym przypadku zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia, spośród zmiennych w czasie wektorów funkcji sterujących  $\mathbf{u}(t)$ , w danym przedziale czasu  $t \in \langle 0, t_k \rangle$ , takiego jednego wektora funkcji  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ , który minimalizuje wskaźnik jakości (2.4). Na rys. 2.2 pokazano zbiór przebiegów czasowych jednej ze składowych  $u_j(t)$  wektora sterowania  $\mathbf{u}(t)$  i odpowiadające im wartości wskaźnika jakości  $I(\mathbf{u})$ .



Rys. 2.2. Zbiór funkcji sterujących i odpowiadające im wartości wskaźnika jakości.

Każdemu wektorowi funkcji sterujących  $\mathbf{u}(t)$  odpowiada tylko jedna wartość wskaźnika jakości  $I(\mathbf{u})$ , który jest liczbą. Określone zostało zatem przyporządkowanie, w którym funkcji lub wektorowi funkcji odpowiada liczba rzeczywista. Przyporządkowanie takie nazywane jest funkcjonałem.

Analityczne uzależnienie wskaźnika jakości  $I(\mathbf{u})$  w postaci (2.4) od kształtu wektora funkcji sterujących  $\mathbf{u}(t)$  wymaga przede wszystkim znajomości przebiegów czasowych zmiennych stanu układu, będących odpowiedzią na zadane wymuszenie. Niezbędne do tego jest rozwiązanie układu równań różniczkowych (2.1). Nie istnieje ogólna i uniwersalna metoda rozwiązywania nieliniowych układów dynamicznych w postaci ciągłej przy dowolnych wymuszeniach. Można natomiast uczynić to dla układów liniowych stacjonarnych danych w postaci (2.2), przy niektórych typach funkcji wymuszających.

Jedną z metod jest zastosowanie przekształcenia Laplace'a, które nie zostało omówione w niniejszej pracy z uwagi na stosunkowo dużą jego popularyzację w dostępnej literaturze (np. publikacje [42], [52]).

Poniżej został pokrótce omówiony sposób polegający na wykorzystaniu rachunku macierzowego dla rozwiązania układu liniowego stacjonarnego  $n$ -tego rzędu danego równaniami (2.2).

Każdy liniowy stacjonarny układ dynamiczny może zostać opisany wektorowym równaniem stanu (2.6).

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (2.6)$$

W praktyce można spotkać się z utrudnieniem polegającym na tym, że w niektórych opisach matematycznych modeli dynamicznych mogą pojawić się stałe, czyli wyrazy stopnia zerowego, których nie ma w wyrażeniu (2.6). W takim przypadku należy określić tzw. warunki początkowe równowagi układu, tzn. takie warunki początkowe wektora stanu  $\mathbf{x}_0$  i wymuszenia  $\mathbf{u}_0$ , które zapewniają równowagę układu. Taki zestaw warunków początkowych posiada tę cechę, że stanowi miejsca zerowe prawych stron równań (2.6). Warto zauważyć, że istnieje nieskończenie wiele wartości wektora stanu i wymuszenia spełniających warunki równowagi układu. Należy następnie dokonać równoległego przesunięcia układu odniesienia współrzędnych wektora stanu i wymuszenia wg zależności (2.7).

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \quad (2.7)$$

Dzięki tej operacji otrzymuje się opis matematyczny w przesuniętym układzie odniesienia wektora stanu  $\mathbf{x}'$  i wymuszenia  $\mathbf{u}'$ . Równania stanu pozbawione są wówczas wolnych wyrazów, a warunki początkowe stanu i wymuszenia, zapewniające równowagę układu, są w przesuniętym układzie odniesienia zerowe, jak to ma miejsce w opisie matematycznym (2.6).

Rozwiązanie ogólne równań (2.6) stanowi sumę rozwiązania ogólnego  $\mathbf{x}_0(t)$  układu równań jednorodnych (z zerowym sterowaniem) oraz rozwiązania szczególnego  $\mathbf{x}_s(t)$  pełnego układu równań (2.6) przy zerowych warunkach początkowych, zależnego od wymuszenia (sterowania).

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{x}_s(t) \quad (2.8)$$

Rozwiązanie  $\mathbf{x}_0(t)$  uzyskuje się przyjmując w równaniach (2.6) wymuszenie zerowe oraz zadane warunki początkowe.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) \quad (2.9)$$

$$\text{dla } t = 0 \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Dla układu równań jednorodnych (2.9) rozwiązanie  $\mathbf{x}_0(t)$  ma postać (2.10).

$$\mathbf{x}_0(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{x}_0 \quad (2.10)$$

Macierz  $e^{\mathbf{A} \cdot t}$ , nazywana macierzą rozwiązań, podstawową, fundamentalną lub funkcją wykładniczą macierzy, zdefiniowana jest zależnością (2.11).

$$e^{\mathbf{A} \cdot t} = \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot t^2 + \frac{1}{3!} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot t^3 + \dots = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{i!} \cdot \mathbf{A}^i \cdot t^i \quad (2.11)$$

Symbol  $\mathbf{I}$  oznacza macierz jednostkową  $n$ -tego rzędu.

Analiza rozwiązań szczególnych równań (2.6) przy zadanym wymuszeniu  $\mathbf{u}(t)$  i zerowych warunkach początkowych prowadzi do postaci (2.12).

$$\mathbf{x}_s(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) \cdot d\tau \quad (2.12)$$

Zmienna  $\tau$  została wprowadzona dla potrzeb całkowania.

Rozwiązanie ogólne równań (2.6) ma zatem postać (2.13).

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) \cdot d\tau \quad (2.13)$$

Składnik pierwszy wyrażenia (2.13), równy  $\mathbf{x}_0(t)$ , interpretuje się jako ruch swobodny układu przy zadanych warunkach początkowych, natomiast składnik drugi, równy  $\mathbf{x}_s(t)$ , opisuje ruch wymuszony układu przy zerowych warunkach początkowych. Ruch układu liniowego

stacjonarnego można zatem przedstawić jako sumę ruchu swobodnego oraz wymuszonego. Ta ważna własność układów liniowych została wykorzystana w późniejszych rozważaniach optymalizacyjnych.

Rozwiązanie dane w postaci wektorowej (2.13) jest nadal trudne do zastosowania, głównie z powodu występowania wykładniczej funkcji macierzowej. Rozwinięcie wyrażenia (2.13) w układ równań skalarnych dla rzędu większego niż trzeci jest praktycznie niemożliwe.

Dodatkowe utrudnienie polega na tym, że przy rozwiązywaniu zadania optymalizacji zależność (2.13) należy wykorzystać w wyrażeniu na wskaźnik jakości (2.4), który można wówczas przedstawić w postaci funkcjonału (2.14).

$$I[\mathbf{u}(t)] = g_0 \left[ e^{\mathbf{A} \cdot t_k} \cdot \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_k} e^{\mathbf{A} \cdot (t_k - \tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) \cdot d\tau \right] + \int_0^{t_k} f_0 \left[ e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A} \cdot (t - \tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) \cdot d\tau, \mathbf{u}(t), t \right] \cdot dt \quad (2.14)$$

Ukazuje to stopień trudności, na jaki napotyka się, poszukując sterowań optymalnych w postaci ciągłej.

Spośród znanych ogólnych metod rozwiązywania tego typu zagadnień wymienić można metody programowania dynamicznego przy zastosowaniu zasady optymalności Bellmana, analizę funkcjonalną z rachunkiem wariacyjnym, zasadę maksimum Pontriagina [31]. Zastosowanie tych metod, szczególnie przy modelach wyższego rzędu prowadzi do skomplikowanych i żmudnych procedur analitycznych niemożliwych do zastosowania w praktyce inżynierskiej.

### **2.3. Zagadnienie sterowania optymalnego w postaci dyskretnej.**

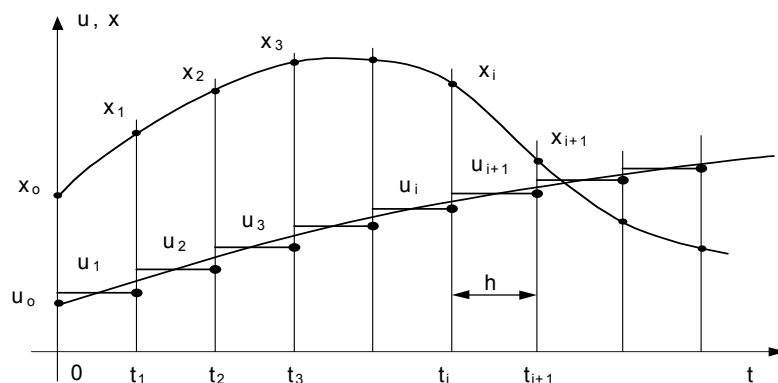
Rozwój cyfrowej techniki obliczeniowej umożliwia rozwiązywanie zadań sterowania optymalnego przy wykorzystaniu metod numerycznych i komputerów cyfrowych. W tym celu należy przedstawione powyżej modele dynamiczne i matematyczne poddać procesowi dyskretyzacji.

Zagadnienie dyskretyzacji zostało szeroko opisane w dostępnych publikacjach naukowych [52], jednak z uwagi na różnice w podejściu do pewnych szczegółów, zostało w niniejszej pracy pokrótce zdefiniowane.

Na rzeczywistej osi czasu wyróżnia się pewne charakterystyczne punkty  $t = t_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), zwane punktami dyskretyzacji. Najczęściej są one odległe od siebie o stałą wartość  $\Delta t = h$ , zwaną krokiem całkowania lub okresem próbkowania (impulsowania).

Przyjmuje się, że ciągłe dotąd funkcje sterujące stają się funkcjami przedziałami stałymi, tak że dla  $t_i < t \leq t_{i+1} = t_i + h$  wartość wektora funkcji sterującej  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{i+1} = \text{const}$ , przy czym wartości  $\mathbf{u}_{i+1}$  odpowiadają sterowaniu w postaci ciągłej  $\mathbf{u}(t)$  obliczonemu dla chwili  $\left(t_i + \frac{1}{2} \cdot h\right)$ , tzn.

$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}\left(t_i + \frac{1}{2} \cdot h\right)$ . Zatem funkcje sterujące przyjmują postać funkcji „schodkowych” lub, mówiąc inaczej, impulsowych (ciągi impulsów prostokątnych  $\{\mathbf{u}_i\}$  o podstawach  $\Delta t = h$  i wysokościach  $\mathbf{u}_i$ ). Wyjaśnia to rys. 2.3.



Rys. 2.3. Zasada dyskretyzacji modelu.

Wszystkie inne wielkości fizyczne zmienne w czasie (np. zmienne stanu i wyjścia) określone są jedynie w punktach dyskretyzacji  $t = t_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), natomiast nie są znane ich wartości między tymi punktami. Oznacza to, że zmienne występujące w modelach przestają być ciągłymi funkcjami czasu, a stają się funkcjami dyskretnymi, które na wykresie przedstawić można w postaci ciągu punktów  $\{x_i\}$  (rys. 2.3).

Aby obliczyć wartości zmiennych stanu dla układu liniowego stacjonarnego opisanego równaniami (2.6) w dowolnym punkcie czasowym  $t_{i+1} = (i + 1) \cdot h$ , należy wykorzystać zależność (2.13) dla

przedziału czasu  $t_i < t \leq t_{i+1}$ , przyjmując jako wartość początkową wektor stanu w punkcie  $t = t_i$  o wartości  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$ , sterowanie w całym rozpatrywanym przedziale  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}(t_{i+1}) = \text{const}$  oraz czas obliczenia równy krokowi całkowania  $t = h$ . Otrzymuje się wówczas wyrażenie postaci (2.15).

$$\mathbf{x}_{i+1} = e^{\mathbf{A} \cdot h} \cdot \mathbf{x}_i + \int_0^h e^{\mathbf{A} \cdot (h-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{i+1} \cdot d\tau \quad (2.15)$$

Po wykonaniu całkowania i przekształceniach zgodnych z zasadami rachunku macierzowego otrzymuje się wyrażenie postaci (2.16).

$$\mathbf{x}_{i+1} = e^{\mathbf{A} \cdot h} \cdot \mathbf{x}_i + \left( e^{\mathbf{A} \cdot h} - \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{i+1} \quad (2.16)$$

Macierze występujące w wyrażeniu (2.16) definiuje się jako:

$$\mathbf{P} = e^{\mathbf{A} \cdot h} \quad \mathbf{Q} = \left( e^{\mathbf{A} \cdot h} - \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \left( \mathbf{P} - \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (2.17)$$

Przyjmując założenie, że istnieje macierz  $\mathbf{A}^{-1}$  odwrotna do  $\mathbf{A}$ , można zależność (2.17) przedstawić w postaci (2.18).

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_{i+1} \quad (2.18)$$

Aby obliczyć odpowiedź dynamiczną układu w chwili  $t_k = k \cdot h$  przy znanych warunkach początkowych  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$  oraz znanym sterowaniu  $\mathbf{u}(t)$ , zamienionym po dyskretyzacji na ciągi impulsów prostokątnych  $\{\mathbf{u}_i\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$  o podstawach  $h$  i wysokościach  $\mathbf{u}_i$ , należy zależność (2.18) stosować rekurencyjnie dla obliczenia kolejnych wartości  $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2 = \\ &= \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3 &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3 = \\ &= \mathbf{P}^3 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3 \end{aligned} \quad (2.19)$$

⋮

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_k = \mathbf{P}^k \cdot \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \mathbf{P}^{k-i} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_i$$



Zależności (2.19) są stosunkowo wygodne dla prowadzenia obliczeń przy użyciu komputera cyfrowego. Należy obliczyć macierze  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$  oraz ich kolejne potęgi, stosując wzory (2.17). Macierze  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$  są funkcjami znanych macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  oraz kroku całkowania  $h$ , który jest również określony. Nie zachodzi przy tym konieczność obliczania macierzy odwrotnej  $\mathbf{A}^{-1}$ . Wykorzystując zależność (2.11) na macierz podstawową  $e^{\mathbf{A}t}$  i zależności (2.17) oraz podstawiając  $t = h$ , otrzymuje się wzory (2.20).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= e^{\mathbf{A} \cdot h} = \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h + \frac{1}{2!} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot h^2 + \frac{1}{3!} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot h^3 + \dots = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{i!} \cdot \mathbf{A}^i \cdot h^i \\
 \mathbf{Q} &= (e^{\mathbf{A} \cdot h} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \\
 &= \left( \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h + \frac{1}{2!} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot h^2 + \frac{1}{3!} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot h^3 + \dots - \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \\
 &= \left( \mathbf{A} \cdot h + \frac{1}{2!} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot h^2 + \frac{1}{3!} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot h^3 + \dots \right) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \tag{2.20} \\
 &= h \cdot \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2!} \cdot \mathbf{A} \cdot h + \frac{1}{3!} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot h^2 + \frac{1}{4!} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot h^3 + \dots \right) \cdot \mathbf{B} = \\
 &= h \cdot \left[ \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{(i+1)!} \cdot \mathbf{A}^i \cdot h^i \right] \cdot \mathbf{B}
 \end{aligned}$$

W praktyce obliczanie szeregów nieskończonych zawartych we wzorach (2.20) kończy się na odpowiednio dalekim składniku, zapewniającym zadawalającą dokładność obliczeń.

Metoda przedstawiona powyżej może zostać zastosowana dla układów liniowych stacjonarnych. W przypadku układów nieliniowych danych równaniami (2.1) przy rozwiązaniu stosuje się stosunkowo wygodną metodę Eulera lub Runge'go - Kuty. W metodzie Eulera w sposób opisany powyżej przeprowadza się dyskretyzację czasu  $t$  oraz funkcji sterujących  $\mathbf{u}$ , natomiast inaczej oblicza się kolejne wartości zmiennych stanu  $\mathbf{x}_i$ . Zakłada się, że w chwili  $t_i = h \cdot i$  znane są wartości zmiennych stanu  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ . Przyjmuje się, że sterowanie w przedziale czasu  $t \in (t_i, t_{i+1})$  jest stałe i ma wartość  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}(t_{i+1}) = \text{const}$ . Zakłada się ponadto, że pochodne zmiennych stanu w tym przedziale są stałe i przyjmują wartości z początku przedziału. Wykorzystując powyższe założenia, można zależność (2.1) przedstawić w postaci (2.21).

$$t_i < t \leq t_{i+1} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_i} = f(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_{i+1}, t_i) = \text{const} \quad (2.21)$$

$\frac{dx}{dt} = \dot{\mathbf{x}}$  - wektor pochodnych zmiennych stanu względem czasu.

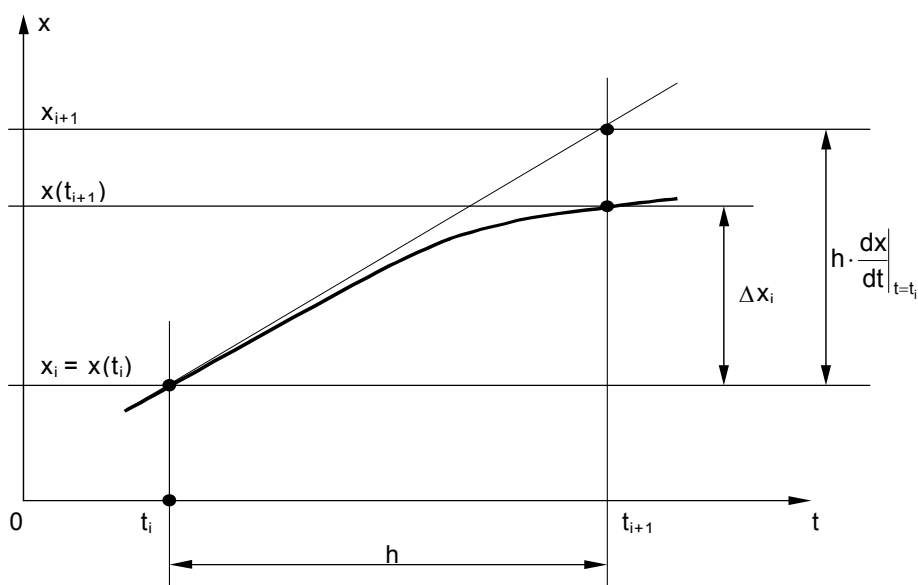
Dla odpowiednio małego kroku całkowania  $h$  przyrosty zmiennych stanu w przedziale czasu  $t \in (t_i, t_{i+1})$  można zastąpić ich różniczkami.

$$\Delta \mathbf{x}_i \cong \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_i} \cdot h = f(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_{i+1}, t_i) \cdot h \quad (2.22)$$

Wartości zmiennych stanu  $\mathbf{x}_{i+1}$  w punkcie  $t_{i+1} = (i+1) \cdot h$  można wówczas określić przybliżoną zależnością (2.23).

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) \cong \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_i} \cdot h = \mathbf{x}_i + f(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_{i+1}, t_i) \cdot h \quad (2.23)$$

Graficzna ilustracja metody Eulera przedstawiona została na rys. 2.4.



Rys. 2.4. Ilustracja metody Eulera.

Błąd metody Eulera maleje wraz ze zmniejszaniem kroku całkowania  $h$ . Zastosowanie zbyt małego kroku  $h$  wydłuża czas

obliczenia i prowadzi do pojawienia się tzw. błędu obliczeń, wynikającego z dużej liczby zaokrążeń. Praktyczne określanie kroku całkowania  $h$  podaje wiele publikacji, ponadto zespoły zajmujące się badaniami symulacyjnymi wypracowały szereg własnych metod, które nie zostały opisane w niniejszej pracy.

W przypadku układów liniowych stacjonarnych danych równaniami (2.6) przy zastosowaniu metody Eulera zależność (2.23) przyjmuje postać (2.24).

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{i+1}) \cdot h \quad (2.24)$$

Wyznaczenie odpowiedzi dynamicznej układu dyskretnego na zadany ciąg wymuszeń  $\{\mathbf{u}_i\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$  przy określonych warunkach początkowych  $\mathbf{x}_0$  w przedziale czasu  $t \in \langle 0, t_k \rangle$  polega na  $k$ -krotnym zastosowaniu wzoru (2.23) i wyznaczeniu ciągu wartości wektora stanu  $\{\mathbf{x}_i\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ .

Rozwiązanie zadania sterowania optymalnego w postaci dyskretniej sprowadza się do wyznaczenia w czasie  $t \in \langle 0, t_k \rangle$  takiego ciągu wektorów funkcji sterujących  $\{\hat{\mathbf{u}}_i\} = \{\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \hat{\mathbf{u}}_k\}$  ( $\hat{\mathbf{u}}_i = [\hat{u}_{i1}, \hat{u}_{i2}, \dots, \hat{u}_{ir}]^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ), które należą do obszaru sterowań dopuszczalnych  $U$  oraz minimalizują wskaźnik jakości sterowania (2.4). W przypadku układów dyskretnych wskaźnik jakości przyjmuje postać (2.25)

$$I(\{\mathbf{u}_i\}) = g_0(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^{i=k} f_0(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, t_i) \quad (2.25)$$

Jednym z głównych problemów rozwiązania tak postawionego zadania sterowania optymalnego jest uzależnienie wskaźnika jakości (2.25) od ciągu wektorów funkcji sterujących  $\{\mathbf{u}_i\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ . Można wówczas sprowadzić zagadnienie sterowania optymalnego do zadania optymalizacji statycznej z ograniczeniami i zastosować do jego rozwiązania jedną z metod deterministycznych.



### 3. ADAPTACJA METODY OPTIMALIZACJI.

Modele dynamiczne opisujące zjawiska zachodzące w maszynach roboczych i ich mechanizmach posiadają na ogół jedną zmienną sterującą. Oznacza to, że  $r$ -wymiarowy wektor sterowania w zależnościach (2.1) i (2.2) staje się wektorem jednoelementowym ( $r = 1$ ), czyli skalarem.

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T \rightarrow \mathbf{u} = [u_1] = u \text{ dla } r = 1 \quad (3.1)$$

Przyjęto założenie, że rozważany układ dynamiczny opisany jest modelem liniowym w postaci (2.2) lub (2.6). W przypadku jednej zmiennej sterującej opis przyjmuje postać (3.2).

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u \quad (3.2)$$

Macierz  $\mathbf{B}$  [ $n \times r$ ] staje się wektorem kolumnowym  $\mathbf{b}$  [ $n$ ] o wymiarze [ $n \times 1$ ].

Dodatkowo przyjęto założenie, że w chwili  $t = 0$  układ posiada pewien różny od zera stan początkowy, określony wektorem  $\mathbf{x}_0$ .

$$\mathbf{x}_0 = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}]^T \text{ dla } t = 0 \quad (3.3)$$

W ujęciu dyskretnym ciąg wektorów sterowania  $\{\mathbf{u}_i\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$  ( $\mathbf{u}_i = [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ir}]^T$   $i = 1, 2, \dots, k$ ) staje się ciągiem liczb lub ciągiem pojedynczych impulsów sterujących o podstawach  $\Delta t = h$  i wysokościach równych  $u_i$  ( $\{\mathbf{u}_i\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} \rightarrow \{u_i\} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ ).

Kolejne wartości wektora stanu można obliczyć metodą Eulera stosując rekurencyjnie wzór (2.24), który w przypadku układu z jednym wejściem (sterowaniem) przyjmuje postać (3.4).

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{b} \cdot u_{i+1}) \cdot h \quad (3.4)$$

Wskaźnik jakości sterowania (2.25) przyjmuje postać (3.5).

$$I(\{u_i\}) = g_0(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^{i=k} f_0(\mathbf{x}_i, u_i) \cdot h \quad (3.5)$$

Poszukiwany jest taki ciąg optymalnych wartości dyskretnych funkcji sterującej  $\{\hat{u}_i\} = \{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_k\}$ , który minimalizuje wskaźnik jakości (3.5). Aby tego dokonać, należy w pierwszej kolejności uzależnić wartości wektora stanu  $\mathbf{x}_i$  w dowolnej chwili  $t = t_i$  od ciągu poprzedzających sterowań  $\{u_j\} = \{u_1, u_2, \dots, u_i\}$ . Zastosowanie do tego celu metody Eulera w klasycznej postaci nie jest efektywne, ponieważ nie pozwala na uzyskanie zależności analitycznej między wektorem stanu  $\mathbf{x}_i$  i ciągiem poprzedzających sterowań  $\{u_j\}$ . Zależność taka jest niezbędna dla zastosowania deterministycznej gradientowej metody optymalizacji.

### **3.1. Zależność analityczna między wektorem stanu i ciągiem impulsów sterujących.**

Poniżej rozważony został ruch wymuszony liniowego stacjonarnego układu dynamicznego z jednym sterowaniem przy niezerowych warunkach początkowych. Z uwagi na liniowość układu, istnieje możliwość osobnego rozpatrzenia ruchu swobodnego (bez sterowania) oraz ruchu wymuszonego z dowolnym sterowaniem (przy zerowych warunkach początkowych).

#### 3.1.1. Ruch swobodny układu.

Liniowy stacjonarny  $n$ -wymiarowy układ dynamiczny opisany równaniem (3.2) przy dowolnych warunkach początkowych  $\mathbf{x}_0$  w przypadku braku sterowania przyjmuje postać (3.6)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{x}_0 = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}]^T \quad \text{dla } t = 0$$

Stosując metodę Eulera można wyznaczyć kolejne wartości wektora stanu  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  dla chwil czasowych  $t_1, t_2, \dots, t_k$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 \cdot h = (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h) \cdot \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 \cdot h = (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h) \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h) \cdot \mathbf{x}_0 \cdot h = \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h)^2 \cdot \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_2 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2 \cdot h = (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h)^2 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h)^2 \cdot \mathbf{x}_0 \cdot h = \quad (3.7) \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h)^3 \cdot \mathbf{x}_0 \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_k &= (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h)^k \cdot \mathbf{x}_0
\end{aligned}$$

Macierze występujące we wzorach (3.7) przy wektorze  $\mathbf{x}_0$  zdefiniowane zostały jako  $\mathbf{S}_i$ .

$$\mathbf{S}_i = (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h)^i \cdot \mathbf{x}_0 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.8)$$

Równania (3.7) określające odpowiedź swobodną układu przyjmują wówczas postać (3.9).

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{sw1} = \mathbf{x}_1 &= \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{x}_0 & \mathbf{S}_1 &= \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h \\
\mathbf{x}_{sw2} = \mathbf{x}_2 &= \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{x}_0 & \mathbf{S}_2 &= (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h)^2 = \mathbf{S}_1^2 \\
&\vdots & & \\
\mathbf{x}_{swk} = \mathbf{x}_k &= \mathbf{S}_k \cdot \mathbf{x}_0 & \mathbf{S}_k &= (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h)^k = \mathbf{S}_1^k
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Dla określenia ciągu wartości odpowiedzi swobodnych rozważanego układu  $\{\mathbf{x}_{swi}\} = \{\mathbf{x}_i\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$  nie jest konieczne wyznaczanie ciągu macierzy  $\{\mathbf{S}_i\} = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_k\}$ . Można to zrobić, stosując rekurencyjnie zależność (3.6) dla ruchu swobodnego przy znanych warunkach początkowych  $\mathbf{x}_0$ .

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i \cdot h \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Uzyskane bezpośrednio ciągu wartości  $\{\mathbf{x}_{swi}\} = \{\mathbf{x}_i\}$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$  można zapamiętać w postaci odpowiednich tablic w pamięci komputera.

### 3.1.2. Ruch układu poddanego działaniu pojedynczego impulsu sterującego.

Poniżej rozważony został ruch liniowego stacjonarnego  $n$ -wymiarowego układu dynamicznego danego układem równań (3.2) przy dowolnych niezerowych warunkach początkowych  $\mathbf{x}_0$  i wymuszeniu w

postaci pojedynczego prostokątnego impulsu sterującego o podstawie  $h$  i wysokości  $u$ , działającego w przedziale czasu  $t \in (t_0 = 0, t_1 = h)$ . Dla czasów  $t > t_1$  wymuszenie przyjmuje wartość zero. Ciąg wartości wektora stanu  $\{\mathbf{x}_i\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ , będący odpowiedzią dynamiczną układu na zadane wymuszenie, można wyznaczyć metodą Eulera stosując rekurencyjnie zależność (3.4).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{b} \cdot u) \cdot h = (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h) \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{b} \cdot h \cdot u \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 \cdot h = \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h) \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{b} \cdot h \cdot u + \mathbf{A} \cdot [(\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h) \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{b} \cdot h \cdot u] \cdot h = \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h)^2 \cdot \mathbf{x}_0 + (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h) \cdot \mathbf{b} \cdot h \cdot u \end{aligned} \quad (3.11)$$

⋮

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h)^k \cdot \mathbf{x}_0 + (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h)^{k-1} \cdot \mathbf{b} \cdot h \cdot u$$

Macierze występujące przy wysokości impulsu sterującego  $u$  we wzorach (3.11) zdefiniowane zostały jako  $\mathbf{X}_i$ . Dla rozważanego w niniejszym rozdziale układu o jednym wejściu macierze  $\mathbf{X}_i$  przyjmują postać  $n$ -wymiarowych wektorów kolumnowych ( $\mathbf{X}_i = [X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}]^T$ ).

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{b} \cdot h \\ \mathbf{X}_2 &= (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h) \cdot \mathbf{b} \cdot h \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_k &= (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot h)^{k-1} \cdot \mathbf{b} \cdot h \end{aligned} \quad (3.12)$$

Wykorzystując zależności (3.8) oraz (3.12) można wyrażenia (3.11) przedstawić w postaci (3.13).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_{sw1} + \mathbf{x}_{wym1} = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{X}_1 \cdot u & \mathbf{x}_{wym1} &= \mathbf{X}_1 \cdot u \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_{sw2} + \mathbf{x}_{wym2} = \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{X}_2 \cdot u & \mathbf{x}_{wym2} &= \mathbf{X}_2 \cdot u \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_{swk} + \mathbf{x}_{wymk} = \mathbf{S}_k \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{X}_k \cdot u & \mathbf{x}_{wymk} &= \mathbf{X}_k \cdot u \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wyrażenie (3.13) pokazuje dwie ważne własności układu liniowego stacjonarnego poddanego działaniu pojedynczego impulsu wymuszającego ( $h \cdot u$ ) przy dowolnych niezerowych warunkach początkowych  $\mathbf{x}_0$ .



- 1) Odpowiedź dynamiczna układu w dowolnej chwili  $t_i$  jest sumą odpowiedzi swobodnej  $\mathbf{x}_{swi} = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{x}_0$  oraz wymuszonej  $\mathbf{x}_{wym_i} = \mathbf{X}_i \cdot u$  ( $i = 1, 2, \dots k$ ).
- 2) Odpowiedź wymuszona  $\mathbf{x}_{wym_i} = \mathbf{X}_i \cdot u$  w dowolnej chwili  $t_i$  jest wprost proporcjonalna do wysokości pojedynczego impulsu sterującego  $u$ , działającego na układ w przedziale czasu  $t \in (t_0 = 0, t_1 = h)$ .

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{swi} + \mathbf{x}_{wym_i} \quad (3.14)$$

$\mathbf{x}_{swi} = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{x}_0$  – odpowiedź swobodna przy niezerowych warunkach początkowych  $\mathbf{x}_0$ ,

$\mathbf{x}_{wym_i} = \mathbf{X}_i \cdot u$  – odpowiedź wymuszona przy zerowych warunkach początkowych

i pojedynczym impulsie sterującym ( $h \cdot u$ ).

Jeżeli wysokość pojedynczego impulsu sterującego  $u$  jest równa jedynce ( $u = 1$ ), to odpowiedź wymuszona  $\mathbf{x}_{wym_i}$  w dowolnej chwili  $t_i$  jest liczbowo równa wektorowi  $\mathbf{X}_i$  określonemu zależnością (3.12).

$$u = 1 \Rightarrow \mathbf{x}_{wym_i} = \mathbf{X}_i \cdot 1 = \mathbf{X}_i \quad i = 1, 2, \dots k \quad (3.15)$$

Ciąg wektorów  $\mathbf{X}_i$  ( $i = 1, 2, \dots k$ ) jest zatem liczbowo równy odpowiedzi wymuszonej układu na pojedynczy jednostkowy impuls sterujący o podstawie  $h$  i wysokości 1. Własność ta umożliwia wyznaczenie ciągu wektorów  $\mathbf{X}_i$  bez konieczności stosowania stosunkowo złożonej zależności (3.12). W tym celu należy przy zerowych warunkach początkowych (aby wyodrębnić rozwiązanie wymuszone) poddać układ (3.4) działaniu jednostkowego impulsu sterującego w przedziale czasu  $t \in (0, h)$ . Otrzymany w wyniku zastosowania metody Eulera ciąg wektorów stanu  $\mathbf{x}_{wym_i}$  równy będzie liczbowo ciągowi wektorów  $\mathbf{X}_i$  ( $i = 1, 2, \dots k$ ) i w takiej postaci może zostać zapisany jako tablica w pamięci komputera.

### 3.1.3. Ruch układu poddanego działaniu dowolnego sterowania.

W układach rzeczywistych sterowanie ma postać nie pojedynczego impulsu, ale stanowi ciąg następujących po sobie impulsów prostokątnych o podstawach  $h$  i wysokościach  $\{u_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots k$ ), działających w przedziałach czasowych odpowiednio  $t \in (t_i, t_{i+1})$  (rys. 2.3). Stosując rozumowanie przedstawione powyżej oraz wykorzystując związki (3.8), (3.9), (3.11), (3.12), (3.13), można wykazać, że ciąg

odpowiedzi dynamicznych  $\{\mathbf{x}_i\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$  układu liniowego stacjonarnego danego równaniami (3.4) na wymuszenie dane ciągiem  $\{u_i\} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  przy niezerowych warunkach początkowych  $\mathbf{x}_0$  opisują zależności (3.16).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1 &= \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{X}_1 \cdot u_1 = \mathbf{x}_{sw1} + \mathbf{X}_1 \cdot u_1 \\
 \mathbf{x}_2 &= \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{X}_1 \cdot u_2 = \mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{X}_1 \cdot u_1) + \mathbf{X}_1 \cdot u_2 = \\
 &= \mathbf{S}_1^2 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{X}_1 \cdot u_1 + \mathbf{X}_1 \cdot u_2 = \\
 &= \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{X}_2 \cdot u_1 + \mathbf{X}_1 \cdot u_2 = \mathbf{x}_{sw2} + \mathbf{X}_2 \cdot u_1 + \mathbf{X}_1 \cdot u_2 \\
 \mathbf{x}_3 &= \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{X}_1 \cdot u_3 = \\
 &= \mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{X}_2 \cdot u_1 + \mathbf{X}_1 \cdot u_2) + \mathbf{X}_1 \cdot u_3 = \quad (3.16) \\
 &= \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot u_1 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{X}_1 \cdot u_2 + \mathbf{X}_1 \cdot u_3 = \\
 &= \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{X}_3 \cdot u_1 + \mathbf{X}_2 \cdot u_2 + \mathbf{X}_1 \cdot u_3 = \\
 &= \mathbf{x}_{sw3} + \mathbf{X}_3 \cdot u_1 + \mathbf{X}_2 \cdot u_2 + \mathbf{X}_1 \cdot u_3 \\
 &\vdots \\
 \mathbf{x}_k &= \mathbf{S}_k \cdot \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^{j=k} \mathbf{X}_{k-j+1} \cdot u_j = \mathbf{x}_{swk} + \sum_{j=1}^{j=k} \mathbf{X}_{k-j+1} \cdot u_j
 \end{aligned}$$

Zależności (3.16) umożliwiają obliczenie odpowiedzi dynamicznej  $\mathbf{x}_i$  układu liniowego stacjonarnego o jednym wejściu w dowolnej chwili  $t_i$  na dowolne wymuszenie  $\{u_j\} = \{u_1, u_2, \dots, u_i\}$  przy niezerowych warunkach początkowych  $\mathbf{x}_0$ . Należy uprzednio wyznaczyć ciągi rozwiązań swobodnych  $\{\mathbf{x}_{swj} = \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{x}_0\}$  oraz ciągi wektorów  $\{\mathbf{X}_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots, i$ ). Spełniony został tym samym postulat analitycznego uzależnienia odpowiedzi dynamicznej układu w dowolnej chwili czasowej od przebiegu funkcji sterującej w czasie poprzedzającym chwilę  $t = t_i$ .

### **3.2. Zadanie sterowania optymalnego jako wynik optymalizacji statycznej.**

Wskaźnik jakości sterowania dla układu dyskretnego dany zależnością (2.25) w przypadku obiektu dynamicznego o jednym wejściu przyjmuje postać (3.17).

$$I(\{u_i\}) = g_0(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^{i=k} f_0(\mathbf{x}_i, u_i, t_i) \quad \{u_i\} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \quad (3.17)$$

Wykorzystując zależności (3.16) w (3.17) można przedstawić wskaźnik jakości sterowania jako funkcję ciągu impulsów sterujących  $\{u_i\} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ .

$$I(\{u_1, u_2, \dots, u_k\}) = g_0\left(\mathbf{x}_{\text{swk}} + \sum_{i=1}^{i=k} \mathbf{x}_{k-i+1} \cdot u_i\right) + \sum_{i=1}^{i=k} f_0\left[\left(\mathbf{x}_{\text{swi}} + \sum_{j=1}^{j=i} \mathbf{x}_{i-j+1} \cdot u_j\right), u_i, t_i\right] \quad (3.18)$$

Zależność (3.18) przedstawia wskaźnik jakości sterowania (2.25) jako funkcję wielu zmiennych ( $u_1, u_2, \dots, u_k$ ) i tym samym zagadnienie sterowania optymalnego zostało sprowadzone do zadania optymalizacji statycznej, w którym wyrażenie (3.18) stanowi funkcję celu. Zmienne ( $u_1, u_2, \dots, u_k$ ) można traktować jako współrzędne punktu  $\mathbf{U}$  w  $k$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych  $[\mathbf{U}(u_1, u_2, \dots, u_k)]$ .

Zagadnienie optymalizacji statycznej sformułowane zostało w następujący sposób.

Niech dana będzie funkcja rzeczywista wielu zmiennych postaci (3.18)  $I = I(\mathbf{U}) = I(u_1, u_2, \dots, u_k)$ . Niech dany będzie również obszar rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  obejmujący te punkty  $\mathbf{U}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ , dla których rozważane zagadnienie posiada sens fizyczny.

Rozwiązanie zadania optymalizacji statycznej polega na znalezieniu takiego punktu  $\hat{\mathbf{U}}(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_k)$  w  $k$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych, który spełnia następujące warunki.

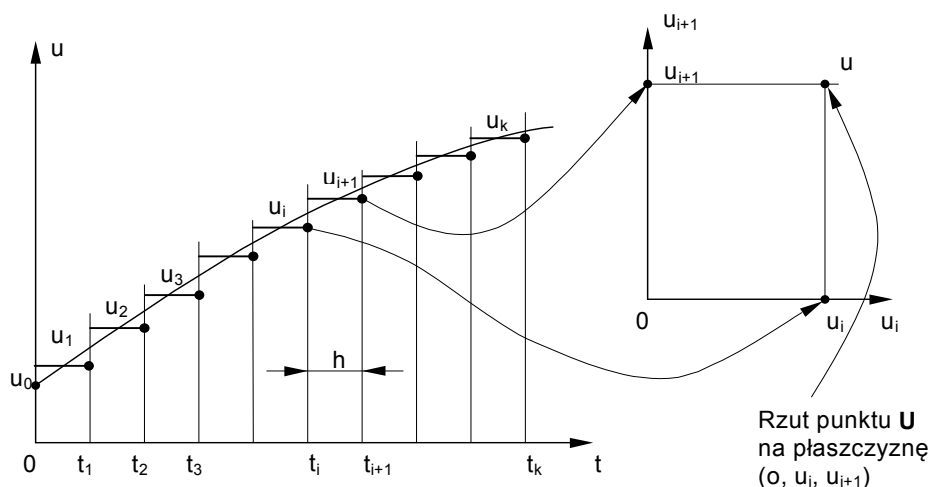
- 1) Punkt  $\hat{\mathbf{U}}(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_k)$  należy do obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  ( $\hat{\mathbf{U}} \in \Phi$ ).
- 2) Wartość funkcji celu  $\hat{I}$  obliczona dla punktu  $\hat{\mathbf{U}}$  jest nie większa od wartości  $I$  obliczonych dla każdego punktu  $\mathbf{U}$  z obszaru  $\Phi$ .

$$\hat{I} = I(\hat{\mathbf{U}}) \leq I = I(\mathbf{U}) \quad \text{dla każdego } \mathbf{U} \in \Phi \quad (3.19)$$

Potocznie mówi się, że punkt  $\hat{\mathbf{U}}$  minimalizuje funkcję celu  $I(\mathbf{U})$  w obszarze  $\Phi$ .

### 3.2.1. Obszar rozwiązań dopuszczalnych.

Należy pamiętać, że każdy punkt  $\mathbf{U}(u_1, u_2, \dots, u_k)$  w  $k$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych jest dla obiektu dynamicznego dyskretnego ciągiem impulsów sterujących  $\{u_i\} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  o podstawach  $h$  i wysokościach  $u_i$  (rys. 3.1).



Rys. 3.1. Ciąg impulsów sterujących jako punkt w przestrzeni  $k$ -wymiarowej.

W zagadnieniach dynamicznych omawianych w niniejszej pracy rozważane są zmienne funkcje sterujące działające w czasie  $t \in \langle 0, t_k \rangle$ , których wartości są ograniczone do zakresu  $u(t) \in \langle u_{\min}, u_{\max} \rangle$ . Narzuca to jedną z granic obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$ , daną w postaci zbioru nierówności (3.20) nałożonych na poszczególne wyrazy ciągu impulsów sterujących  $\{u_i\} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ , stanowiące jednocześnie współrzędne  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  punktu  $\mathbf{U}$  w  $k$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych.

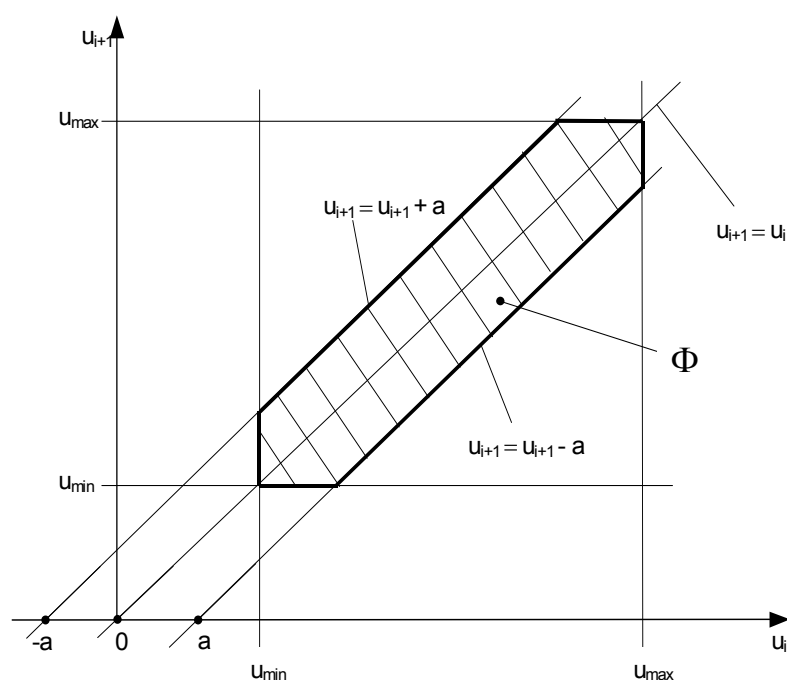
$$u_{\min} \leq u_i \leq u_{\max} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.20)$$

Inne ograniczenie nałożone na ciąg impulsów sterujących  $\{u_i\}$  oraz współrzędne punktu  $\mathbf{U}$  w  $k$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych wynika z praktycznego wymagania, aby zmiana (wzrost lub spadek) funkcji sterującej nie była zbyt szybka. W ujęciu dyskretnym odpowiada

to wymaganiu, aby sąsiednie impulsy sterujące lub sąsiednie współrzędne punktu  $\mathbf{U}$  nie różniły się między sobą więcej, niż wynika to z dopuszczalnej wartości pochodnej funkcji sterującej względem czasu.

$$\begin{aligned} |u_{i+1} - u_i| \leq a \quad \wedge \quad u_1 - u_{\min} \leq a \quad \wedge \quad u_{\max} - u_k \leq a \\ (a > 0 \quad i = 1, 2, \dots, k-1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Na rys. 3.2 pokazano rzut tak zdefiniowanego obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  na płaszczyznę  $(0, u_i, u_{i+1})$ .



Rys. 3.2. Rzut obszaru rozwiązań dopuszczalnych na płaszczyznę  $(0, u_i, u_{i+1})$ .

Ograniczenia nierównościowe (3.20) i (3.21) nazywane są ograniczeniami obszarowymi określającymi zbiór rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$ .

Stosowane w maszynach roboczych oraz ich modelach dynamicznych funkcje sterujące  $u(t)$  są w warunkach statycznych proporcjonalne do prędkości członów wykonawczych mechanizmów

[  $v(t) \cong k \cdot u(t)$  ]. Jeżeli mechanizm dodatkowo zaopatrzony jest w układ regulacji przemieszczenia, to można przyjąć, że przemieszczenie rzeczywiste  $s$  elementu maszyny z dużą dokładnością odwzorowuje przemieszczenie zadane  $s_z$ , które podczas ruchu roboczego w czasie  $\langle 0, t_k \rangle$  określa zależność (3.22).

$$s \cong s_z \quad s = \int_0^{t_k} v(t) \cdot dt \quad s_z = k \cdot \int_0^{t_k} u(t) \cdot dt \quad (3.22)$$

$k$  - współczynnik wzmocnienia dla prędkości.

W układach, gdzie wymagana jest duża dokładność pozycjonowania, stawia się warunek, aby przemieszczenie w ruchu roboczym posiadało stałą, zadaną z góry wartość  $s_k$ . W opisie ciągłym prowadzi to do zależności (3.23).

$$k \cdot \int_0^{t_k} u(t) \cdot dt = s_k = \text{const} \quad (3.23)$$

W zapisie dyskretnym całka w zależności (3.23) przyjmuje postać sumy ciągu powierzchni kolejnych impulsów sterujących o podstawach  $h$  i wysokościach  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

$$k \cdot \sum_{i=1}^{i=k} h \cdot u_i = s_k = \text{const} \quad (3.24)$$
$$\sum_{i=1}^{i=k} u_i = \frac{s_k}{k \cdot h} = \text{const}$$

Związki (3.24) określają ograniczenie równościowe, zwane funkcjonalnym, stanowiące jedną z granic obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$ . Łatwo zauważyć, że zależność (3.24) stanowi równanie hiperpłaszczyzny w  $k$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych w układzie współrzędnych  $(0, u_1, u_2, \dots, u_k)$ .

### 3.2.2. Wskaźnik jakości sterowania.

W zagadnieniach optymalizacji omawianych w niniejszej pracy rozważane są dwa typy wskaźników jakości sterowania.

W wielu przypadkach ważne jest, aby zminimalizować energię wewnętrzną układu po zakończeniu sterowania. Sprowadza to wskaźnik

jakości sterowania (3.17) do funkcji stanu końcowego  $g_0(\mathbf{x}_k)$ , tzn. uzależnia go jedynie od wartości zmiennych stanu w chwili  $t_k$ . Zmienne stanu układu są na ogół związane z elementami magazynującymi energię i są tak zdefiniowane, że o energii wewnętrznej decyduje kwadrat odchylenia składowych wektora stanu  $\mathbf{x}_k (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$  w chwili  $t_k$  od pewnej jego wartości ustalonej  $\mathbf{x}_u (x_{u1}, x_{u2}, \dots, x_{un})$ , spełniającej warunki równowagi układu. Wskaźnik jakości pierwszego typu przyjmuje postać (3.25) i posiada najczęściej wymiar energii.

$$\begin{aligned} I[u(t)] &= r_1 \cdot (x_{k1} - x_{u1})^2 + r_2 \cdot (x_{k2} - x_{u2})^2 + \dots + r_n \cdot (x_{kn} - x_{un})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot (x_{ki} - x_{ui})^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Po wykorzystaniu zależności (3.16) w (3.25) otrzymuje się wskaźnik jakości sterowania w postaci (3.26).

$$\begin{aligned} I(u_1, u_2, \dots, u_k) &= \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot (x_{ki} - x_{ui})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot \left( x_{swki} + \sum_{j=1}^{j=k} X_{(k-j+1)i} \cdot u_{ji} - x_{ui} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Wskaźnik jakości drugiego typu zastosowany został przy rozwiązywaniu zagadnień związanych z minimalizacją obciążeń wewnętrznych mechanizmów. Wszystkie omawiane w tej pracy mechanizmy maszyn roboczych i ich modele mają charakter oscylacyjny. W większości przypadków ruchu roboczego mechanizmów sterowanie przeprowadza układ od pewnego stanu początkowego  $\mathbf{x}_0$  do stanu ustalonego  $\mathbf{x}_u$ , przy czym funkcja sterująca zmienia się od wartości  $u_0$  do  $u_m$  w przedziale czasu  $t \in \langle 0, t_r \rangle$  (np. przy rozruchu mechanizmu), natomiast dla czasów  $t > t_r$  funkcja sterująca przyjmuje wartości stałe  $u = u_m$ , co odpowiada fazie ruchu ustalonego mechanizmu. Zmiana funkcji sterującej w czasie  $t \in \langle 0, t_r \rangle$  wytrąca układ ze stanu równowagi, wywołując oscylacje zmiennych stanu wokół wartości ustalonej, do której układ dąży przy czasie  $t \rightarrow \infty$ , o ile jest stabilny. Wyjaśnia to rys. 3.3. Prowadząc obserwację układu w czasie  $t \in \langle 0, t_k \rangle$ , można stwierdzić, że większym maksymalnym wartościami zmiennych stanu odpowiadają

większe oscylacje. Zaproponowano zatem wskaźnik jakości typu całkowego postaci (3.27).

$$\begin{aligned}
 I[u(t)] = & r_1 \cdot \int_0^{t_k} (x_1 - x_{u1})^2 \cdot dt + r_2 \cdot \int_0^{t_k} (x_2 - x_{u2})^2 \cdot dt + \dots \\
 & \dots + r_n \cdot \int_0^{t_k} (x_n - x_{un})^2 \cdot dt = \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot \int_0^{t_k} (x_i - x_{ui})^2 \cdot dt
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Zmniejszenie wartości wskaźnika (3.27) odpowiada mniejszym oscylacjom oraz mniejszym obciążeniom maksymalnym mechanizmu. Po dyskretyzacji wskaźnik (3.27) przyjmuje postać (3.28).

$$I(u_1, u_2, \dots, u_k) = \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot \sum_{j=1}^{j=k} (x_{ji} - x_{ui})^2 \tag{3.28}$$

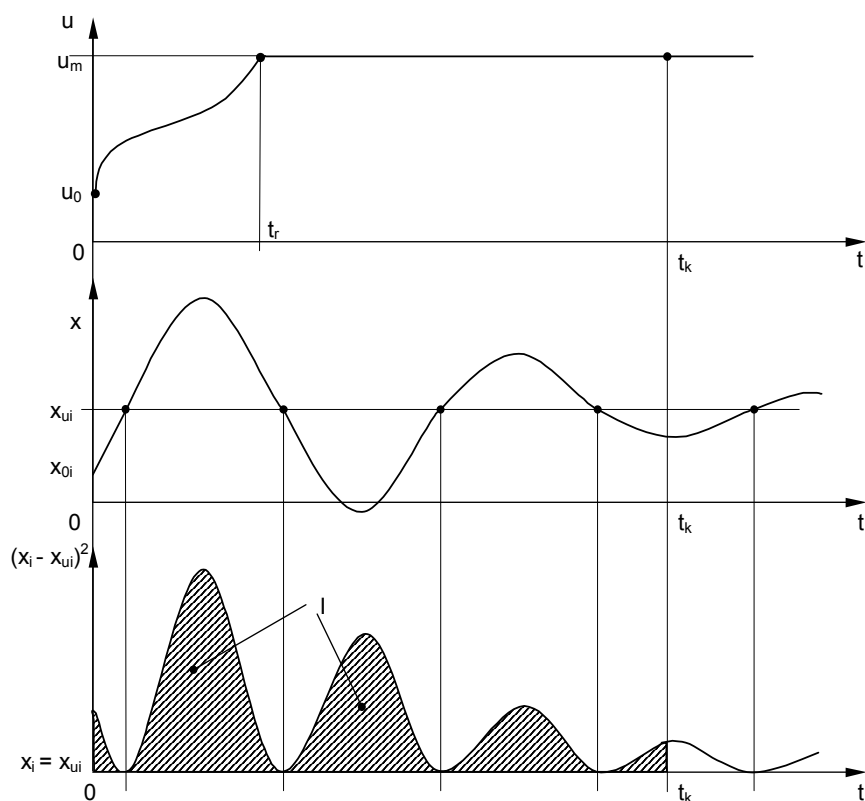
Jego interpretacja geometryczna pokazana jest na rys. 3.3.

Po wykorzystaniu zależności (3.16) w (3.28) otrzymuje się ostateczną postać wskaźnika jakości drugiego typu.

$$I(u_1, u_2, \dots, u_k) = \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot \sum_{j=1}^{j=k} \left( x_{swji} + \sum_{l=1}^{l=j} X_{(j-l+1)i} \cdot u_{li} - x_{ui} \right)^2 \tag{3.29}$$

W oznaczeniach stosowanych w powyższych wzorach wielkości posiadają dwa indeksy. Indeks pierwszy odpowiada numerowi chwili czasowej i przyjmuje wartości 0, 1, 2, ... k, indeks drugi odpowiada kolejnemu numerowi zmiennej stanu i przyjmuje wartości 1, 2, ... n. Np. symbol  $x_{ji}$  oznacza wartość i-tej zmiennej stanu w chwili  $t = t_j$ . Indeks „u” oznaczone są zmienne stanu i wymuszenia odpowiadające warunkom równowagi układu w ruchu ustalonym. Np. symbol  $x_{ui}$  oznacza wartość i-tej zmiennej stanu w warunkach ustalonych.





Rys. 3.3. Interpretacja geometryczna całkowego wskaźnika jakości przy rozruchu mechanizmu.

### 3.3. Metoda optymalizacji.

Dla rozwiązania zadania optymalizacji zastosowano deterministyczną metodę gradientu prostego zmodyfikowaną do zagadnienia optymalizacji z ograniczeniami, tzn. uwzględniającą fakt istnienia obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$ .

Jak wiadomo, znane sterowanie w czasie  $t \in \langle 0, t_k \rangle$  stanowi w ujęciu dyskretnym ciąg impulsów wymuszających  $\{u_i\} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  lub punkt  $\mathbf{U}$  o współrzędnych  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  w  $k$ -wymiarowej przestrzeni liczb

rzeczywistych. Gradient funkcji celu  $I(\mathbf{U})$  w tym punkcie jest wektorem, którego składowe są pochodnymi cząstkowymi funkcji celu względem kolejnych współrzędnych.

$$\nabla I(\mathbf{U}) = \left[ \frac{\partial I}{\partial u_1}, \frac{\partial I}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial I}{\partial u_k} \right] \quad (3.30)$$

Wektor gradientu  $\nabla I(\mathbf{U})$  w punkcie  $\mathbf{U}$  określa kierunek największego przyrostu funkcji celu  $I(\mathbf{U})$  w tym punkcie, natomiast kierunek jej największego spadku określa wektor  $\bar{\mathbf{p}}$  dany zależnością (3.31).

$$\bar{\mathbf{p}} = -\beta \cdot \nabla I(\mathbf{U}) = -\beta \cdot \left[ \frac{\partial I}{\partial u_1}, \frac{\partial I}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial I}{\partial u_k} \right] \quad \beta > 0 \quad (3.31)$$

Jeżeli dokona się przesunięcia z punktu  $\mathbf{U}(u_1, u_2, \dots, u_k)$  o wektor  $\bar{\mathbf{p}} [p_1, p_2, \dots, p_k]$  do nowego punktu  $\mathbf{U}^1$  o współrzędnych  $(u_1+p_1, u_2+p_2, \dots, u_k+p_k)$ , to uzyska się w sposób najbardziej efektywny zmniejszenie wartości funkcji celu. Obliczając w każdym nowym punkcie wartość gradientu oraz składowe nowego wektora  $\bar{\mathbf{p}}$  i dokonując kolejnych przesunięć, można uzyskać zmniejszenie wartości funkcji celu i zbliżyć się do punktu optymalnego  $\hat{\mathbf{U}}$ .

Może się przy tym zdarzyć tak, że na skutek przesunięcia o wektor  $\bar{\mathbf{p}}$  nowy punkt znajdzie się poza granicą obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$ . W pewnych przypadkach, kiedy granica obszaru  $\Phi$  jest hiperpłaszczyzną w przestrzeni  $k$ -wymiarowej, można dokonać rzutowania wektora największego spadku  $\bar{\mathbf{p}}$  na aktualnie przekraczaną granicę. Należy wówczas określić współrzędne nowego wektora  $\bar{\mathbf{s}} [s_1, s_2, \dots, s_k]$ , będącego rzutem wektora  $\bar{\mathbf{p}}$  na granicę obszaru  $\Phi$ , i dokonać przesunięcia z punktu  $\mathbf{U}$  do  $\mathbf{U}^1$  w kierunku wektora  $\bar{\mathbf{s}}$ .

Optymalizację należy zakończyć, jeżeli spadek funkcji celu  $\Delta I$  przy przesunięciu z punktu  $\mathbf{U}$  do  $\mathbf{U}^1$  o wektor  $\bar{\mathbf{p}}$  lub jego rzut  $\bar{\mathbf{s}}$  jest odpowiednio mały. Warunek końca określa zależność (3.32).

$$|\Delta I| = |I(\mathbf{U}^1) - I(\mathbf{U})| \leq \alpha \quad \alpha > 0 \quad (3.32)$$

Ostatni z punktów  $\mathbf{U}$ , do którego dokonano ostatniego przesunięcia, traktować można jako rozwiązanie zadania optymalizacji  $\hat{\mathbf{U}}$ , a odpowiadające mu sterowanie  $\{\hat{u}_i\} = \{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_k\}$  jest sterowaniem optymalnym.

### 3.3.1. Składowe wektora gradientu.

Zależność analityczna między funkcją celu  $I(\mathbf{U})$  oraz współzrędnymi punktu  $\mathbf{U}$  ( $u_1, u_2, \dots, u_k$ ) umożliwia określenie analityczne składowych wektora gradientu  $\nabla I(\mathbf{U})$  w tym punkcie.

Dla wskaźnika jakości pierwszego typu, danego zależnością (3.26), składowe wektora gradientu określają zależność (3.33).

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial u_1} &= \sum_{i=1}^{i=n} 2 \cdot r_i \cdot (\mathbf{x}_{ki} - \mathbf{x}_{ui}) \cdot \mathbf{X}_{ki} \\ \frac{\partial I}{\partial u_2} &= \sum_{i=1}^{i=n} 2 \cdot r_i \cdot (\mathbf{x}_{ki} - \mathbf{x}_{ui}) \cdot \mathbf{X}_{(k-1)i} \\ &\vdots \\ \frac{\partial I}{\partial u_k} &= \sum_{i=1}^{i=n} 2 \cdot r_i \cdot (\mathbf{x}_{ki} - \mathbf{x}_{ui}) \cdot \mathbf{X}_{1i} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ogólnie:

$$\frac{\partial I}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{i=n} 2 \cdot r_i \cdot (\mathbf{x}_{ki} - \mathbf{x}_{ui}) \cdot \mathbf{X}_{(k-j+1)i} \quad (3.34)$$

Wartości  $\mathbf{x}_{ki}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) stanowią składowe wektora stanu  $\mathbf{x}_k$  w chwili  $t = t_k$  dla sterowania odpowiadającego punktowi  $\mathbf{U}$  ( $u_1, u_2, \dots, u_k$ ).

Wartości  $\mathbf{X}_{ji}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) stanowią składowe wektora  $\mathbf{X}_j$  w chwili  $t = t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) będącego odpowiedzią wymuszoną układu na pojedynczy jednostkowy impuls sterujący o podstawie  $h$  i wysokości 1 (rozdział 3.1.2).

Dla wskaźnika jakości drugiego typu danego zależnością (3.28) składowe wektora gradientu określa bardziej złożona zależność (3.35).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l}{\partial u_1} &= \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot \sum_{j=1}^{j=k} 2 \cdot (x_{ji} - x_{ui}) \cdot X_{ji} \\
 \frac{\partial l}{\partial u_2} &= \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot \sum_{j=2}^{j=k} 2 \cdot (x_{ji} - x_{ui}) \cdot X_{(j-1)i} \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial l}{\partial u_k} &= \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot \sum_{j=k}^{j=k} 2 \cdot (x_{ji} - x_{ui}) \cdot X_{1i}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Ogólnie:

$$\frac{\partial l}{\partial u_l} = \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot \sum_{j=l}^{j=k} 2 \cdot (x_{ji} - x_{ui}) \cdot X_{(j-l+1)i} \tag{3.36}$$

Wartości  $x_{ji}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) stanowią składowe wektora stanu  $\mathbf{x}_j$  w chwili  $t = t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) dla sterowania odpowiadającego punktowi  $\mathbf{U}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ .

### 3.3.2. Rzutowanie wektora największego spadku.

Jeżeli punkt  $\mathbf{U}(u_1, u_2, \dots, u_k)$  leży w pobliżu granicy obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$ , to przy przesunięciu o wektor największego spadku  $\bar{\mathbf{p}}$  nowy punkt  $\mathbf{U}^l$  może znaleźć się poza obszarem. Należy wówczas rzutować wektor  $\bar{\mathbf{p}}$  na granicę obszarową, która jest akurat przekraczana, i dokonać przesunięcia o nowy wektor  $\bar{\mathbf{s}}$ , będący rzutem  $\bar{\mathbf{p}}$ .

Poniżej rozważony został przypadek, kiedy l kolejnych składowych wektora największego spadku  $\bar{\mathbf{p}}$  jest odpowiedzialnych za „wyjście” punktu  $\mathbf{U}$  poza obszar rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  dany ograniczeniami obszarowymi (3.21). Podobszar, który jest akurat opuszczany, ma postać (3.55) i stanowi rzut k-wymiarowego obszaru  $\Phi$  na l-wymiarową podprzestrzeń o układzie współrzędnych  $(o, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+l})$ .

$$|u_{i+2} - u_{i+1}| \leq a |u_{i+3} - u_{i+2}| \leq a \dots |u_{i+l} - u_{i+l-1}| \leq a \quad (l < k) \tag{3.55}$$

Ponieważ o „wyjściu” poza podobszar (3.55) decydują jedynie składowe  $[p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{i+l}]$  wektora  $\bar{\mathbf{p}}$ , a sam podobszar (3.55) zależy tylko od współrzędnych  $(u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+l})$  i jest niezależny od pozostałych  $k-l$  współrzędnych, można wektor  $\bar{\mathbf{p}}$  (podobnie jak obszar  $\Phi$ ) rzutować na podprzestrzeń  $l$ -wymiarową i zredukować zagadnienie do tej podprzestrzeni.

Bez utraty ogólności można założyć, że  $l$ -wymiarowy (po rzutowaniu na podprzestrzeń) wektor największego spadku  $\bar{\mathbf{p}}$   $[p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{i+l}]$  jest odpowiedzialny za „wyjście” punktu  $\mathbf{U}$  poza granicę podobszaru (3.55) daną po zredukowaniu do podprzestrzeni  $l-1$  równaniami (3.56).

$$\begin{aligned} 1) \quad & u_{i+2} - u_{i+1} = a && \bar{\mathbf{w}}_{(1)} [-1, 1, 0, \dots, 0, 0] \\ 2) \quad & u_{i+3} - u_{i+2} = a && \bar{\mathbf{w}}_{(2)} [0, -1, 1, \dots, 0, 0] \\ & \vdots && \vdots \\ l-1) \quad & u_{i+l} - u_{i+l-1} = a && \bar{\mathbf{w}}_{(l-1)} [0, 0, 0, \dots, -1, 1] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Zależność (3.56) przedstawia równania  $l-1$  hiperpłaszczyzn w podprzestrzeni  $l$ -wymiarowej, z którymi związane są prostopadłe do nich wektory kierunkowe  $\bar{\mathbf{w}}_{(m)} [w_{(m)1}, w_{(m)2}, \dots, w_{(m)l}]$  ( $m = 1, 2, \dots, l-1$ ).

Składowe wektorów  $\bar{\mathbf{w}}_{(m)}$  odpowiadających poszczególnym hiperpłaszczyznom podano w zależności (3.56). Część wspólną wszystkich hiperpłaszczyzn (3.56) stanowi prosta „ $z$ ” w podprzestrzeni  $l$ -wymiarowej. Kierunek prostej wyznacza równoległy do niej wektor  $\bar{\mathbf{z}} [z_1, z_2, \dots, z_l]$  prostopadły do wszystkich wektorów  $\bar{\mathbf{w}}_{(m)}$ . Wiadomo, że iloczyn skalarny dwóch wektorów prostopadłych jest równy zero. Wykorzystując tę własność, można określić składowe wektora  $\bar{\mathbf{z}}$ .

$$\bar{\mathbf{z}} [z_1, z_2, \dots, z_l] = \bar{\mathbf{z}} [1, 1, \dots, 1] \quad z_1 = z_2 = \dots = z_l = 1 \quad (3.57)$$

Łatwo wykazać, że iloczyn skalarny wektora  $\bar{\mathbf{z}}$  i każdego z wektorów  $\bar{\mathbf{w}}_{(m)}$  jest równy zero.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}} \cdot \bar{\mathbf{w}}_{(m)} &= z_1 \cdot w_{(m)1} + z_2 \cdot w_{(m)2} + \dots + z_l \cdot w_{(m)l} = \\ &= \sum_{j=1}^{j=l} z_j \cdot w_{(m)j} = \sum_{j=1}^{j=l} w_{(m)j} = 0 \quad m = 1, 2, \dots, l-1 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Aby określić składowe wektora rzutu  $\bar{\mathbf{s}}$  w podprzestrzeni l-wymiarowej, należy rzutować wektor  $\bar{\mathbf{p}}$  na prostą „z”. Kąt  $\beta$  między wektorami  $\bar{\mathbf{p}}$  i  $\bar{\mathbf{z}}$  z określa zależność (3.59).

$$\cos \beta = \frac{p_{i+1} \cdot z_1 + p_{i+2} \cdot z_2 + \dots + p_{i+l} \cdot z_l}{|\bar{\mathbf{p}}| \cdot |\bar{\mathbf{z}}|}$$

$$\cos \beta = \frac{p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_{i+l}}{|\bar{\mathbf{p}}| \cdot |\bar{\mathbf{z}}|}$$

$$|\bar{\mathbf{p}}| = \sqrt{p_{i+1}^2 + p_{i+2}^2 + \dots + p_{i+l}^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{j=l} p_{i+j}^2} \quad (3.59)$$

$$|\bar{\mathbf{z}}| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_l^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{j=l} z_j^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{j=l} 1^2} = \sqrt{l}$$

Miarę rzutu  $\bar{\mathbf{s}}$  wektora  $\bar{\mathbf{p}}$  na prostą „z” określa zależność (3.60).

$$s = |\bar{\mathbf{p}}| \cdot \cos \beta \quad (3.60)$$

Jeżeli miara  $s$  jest dodatnia, wektor  $\bar{\mathbf{s}}$  jest skierowany zgodnie ze zwrotem wektora  $\bar{\mathbf{z}}$ , jeżeli ujemna - przeciwnie.

Wektor rzutu  $\bar{\mathbf{s}}$  leżący na prostej „z” i posiadający ten sam kierunek, co wektor  $\bar{\mathbf{z}}$ , tworzy z każdą z osi układu współrzędnych (0,  $u_{i+1}$ ,  $u_{i+2}$ , ...  $u_{i+l}$ ) ten sam kąt ostry  $\alpha$  określony zależnością (3.61).

$$\cos \alpha = \frac{z_j}{|\bar{\mathbf{z}}|} = \frac{1}{\sqrt{l}} \quad (j = 1, 2, \dots, l) \quad (3.61)$$

Wykorzystując zależności (3.59), (3.60) i (3.61) łatwo dowieść, że wszystkie składowe wektora  $\bar{\mathbf{s}}$  na osie układu współrzędnych (0,  $u_{i+1}$ ,  $u_{i+2}$ , ...  $u_{i+l}$ ) są sobie równe. Określa je zależność (3.62).

$$s_{i+j} = s \cdot \cos\alpha = |\bar{\mathbf{p}}| \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha = |\bar{\mathbf{p}}| \cdot \frac{p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_{i+l}}{|\bar{\mathbf{p}}| \cdot \sqrt{l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}$$

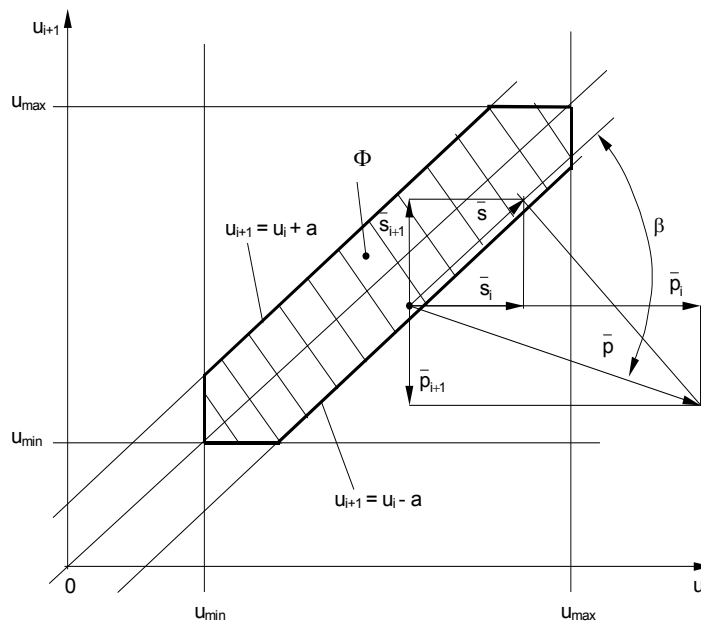
$$s_{i+j} = \frac{1}{l} \cdot (p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_{i+l}) = \frac{1}{l} \cdot \sum_{n=1}^{n=l} p_{i+n} \quad (j = 1, 2, \dots, l) \quad (3.62)$$

$$s_{i+1} = s_{i+2} = \dots = s_{i+l} = \frac{1}{l} \cdot \sum_{n=1}^{n=l} p_{i+n}$$

Pozostałe  $k - l$  składowych wektora największego spadku  $\bar{\mathbf{p}}$ , które nie są odpowiedzialne za „wyjście” punktu  $\mathbf{U}$  poza obszar  $\Phi$ , nie wymagają rzutowania i pozostają niezmienione.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}} & [p_1, p_2, \dots, p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{i+l}, p_{i+l+1}, \dots, p_k] \\ \bar{\mathbf{s}} & [p_1, p_2, \dots, p_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \dots, s_{i+l}, p_{i+l+1}, \dots, p_k] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Na rys. 3.4 pokazano sytuację, kiedy dwie kolejne współrzędne wektora  $\bar{\mathbf{p}}$ :  $p_i$  oraz  $p_{i+1}$  są odpowiedzialne za „wyjście” punktu  $\mathbf{U}$  poza obszar  $\Phi$  dany ograniczeniem (3.21).



Rys. 3.4. Rzutowanie wektora największego spadku  $\bar{\mathbf{p}}$ .

Łatwo wykazać, że dwie kolejne składowe wektora  $\bar{\mathbf{s}}$ :  $s_i$  oraz  $s_{i+1}$  określa zależność (3.64).

$$s_i = s_{i+1} = \frac{1}{2} \cdot (p_i + p_{i+1}) \quad (3.64)$$

Kiedy jedna ze składowych wektora  $\bar{\mathbf{p}}$ :  $p_i$  jest odpowiedzialna za „wyjście” punktu  $\mathbf{U}$  poza granicę obszaru  $\Phi$  daną nierównościami (3.20), należy przyjąć odpowiednią składową wektora rzutu  $\bar{\mathbf{s}}$  jako  $s_i = 0$ .

Jeżeli l kolejnych składowych wektora największego spadku  $\bar{\mathbf{p}}$  jest odpowiedzialnych za „wyjście” „jednocześnie” poza obie granice (3.20) oraz (3.21) obszaru  $\Phi$ , wówczas w wektorze rzutu  $\bar{\mathbf{s}}$  należy przyjąć wszystkie l składowych jako równe zero.

$$s_{i+1} = s_{i+2} = \dots = s_{i+l} = 0 \quad (3.65)$$

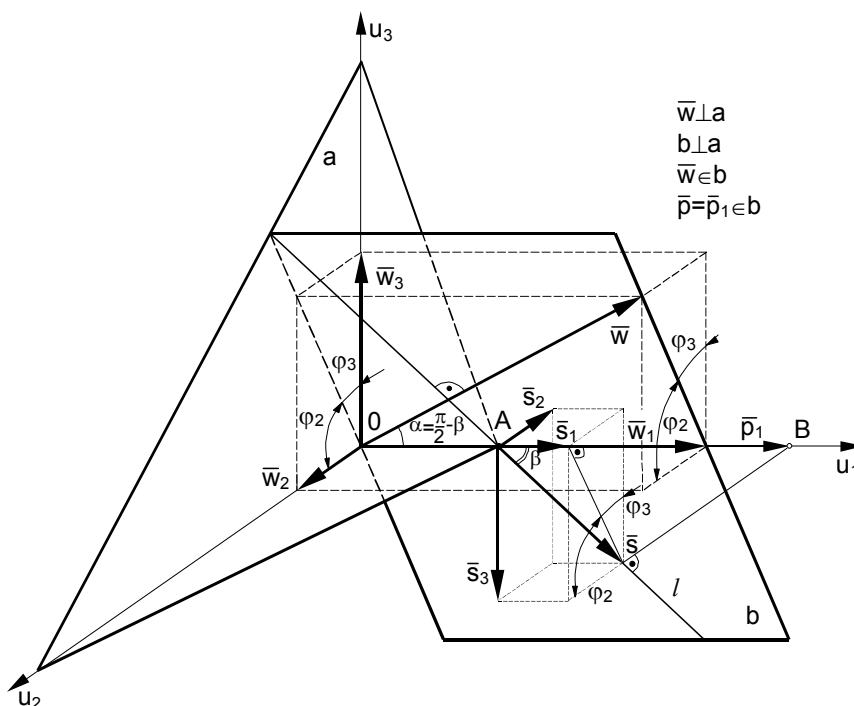
W przypadku ograniczeń funkcjonalnych obszaru  $\Phi$  danych zależnością (3.24), określającą równanie pewnej hiperpłaszczyzny „a” w przestrzeni k-wymiarowej, należy przy każdym przesunięciu punktu  $\mathbf{U}$  rzutować wektor największego spadku  $\bar{\mathbf{p}}$  na wspomnianą hiperpłaszczyznę.

Niech hiperpłaszczyzna „a” dana będzie równaniem (3.66).

$$w_1 \cdot u_1 + w_2 \cdot u_2 + \dots + w_k \cdot u_k = d \quad \sum_{i=1}^{i=k} w_i \cdot u_i = d \quad (3.66)$$

Współczynniki  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) są współrzędnymi wektora  $\bar{\mathbf{w}}$  [ $w_1, w_2, \dots, w_k$ ] prostopadłego do hiperpłaszczyzny „a”. Wektor największego spadku  $\bar{\mathbf{p}}$  [ $p_1, p_2, \dots, p_k$ ] należy rzutować na hiperpłaszczyznę „a” i określić składowe rzutu  $\bar{\mathbf{s}}$  [ $s_1, s_2, \dots, s_k$ ]. Wyprowadzenie odpowiednich zależności dokonane zostało dla przestrzeni trójwymiarowej, czyli dla układu współrzędnych ( $o, u_1, u_2, u_3$ ), który jest wyobrażalny geometrycznie ( $k = 3$ ). Następnie zagadnienie zostało rozszerzone do dowolnej przestrzeni k-wymiarowej. Bez utraty ogólności dla uproszczenia przyjęto, że wektor  $\bar{\mathbf{p}}$  posiada chwilowo tylko jedną składową  $p_1$  różną od zera ( $p_1 \neq 0$ ), pozostałe dwie są równe zero ( $p_2 = p_3 = 0$ ), tzn. wektor  $\bar{\mathbf{p}}$  leży na osi ( $o, u_1$ ). Sytuację ilustruje rys. 3.5.



Rys. 3.5. Rzutowanie wektora  $\bar{p}$  na płaszczyznę „a”.

Należy rzutować wektor  $AB = \bar{p} [p_1, 0, 0]$  na płaszczyznę „a” daną równaniem (3.67).

$$w_1 \cdot u_1 + w_2 \cdot u_2 + w_3 \cdot u_3 = d \quad (3.67)$$

Wektor  $\bar{w} [w_1, w_2, w_3]$  jest prostopadły do płaszczyzny „a” i został tak usytuowany, że jego początek pokrywa się z początkiem układu współrzędnych. Przez wektor  $\bar{p}$  leżący na osi  $(o, u_1)$  oraz wektor  $\bar{w}$  przesunięta została płaszczyzna pomocnicza „b”. Krawędź „l” przecięcia płaszczyzn „a” i „b” wyznacza kierunek wektora rzutu  $\bar{s}$ , który jest prostopadły do wektora  $\bar{w}$ . Wykorzystując definicję iloczynu skalarnego dwóch wektorów oraz znane zależności trygonometryczne, można określić składowe  $s_1, s_2, s_3$  wektora rzutu  $\bar{s}$ . Słuszne są przy tym poniższe równania.

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} w_i \cdot p_i}{|\bar{\mathbf{w}}| \cdot |\bar{\mathbf{p}}|} = \frac{w_1}{|\bar{\mathbf{w}}|}$$

$$|\bar{\mathbf{w}}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} \quad |\bar{\mathbf{p}}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = |p_1|$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{\sqrt{w_2^2 + w_3^2}}{|\bar{\mathbf{w}}|}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{w_2}{\sqrt{w_2^2 + w_3^2}} \quad \cos \varphi_3 = \frac{w_3}{\sqrt{w_2^2 + w_3^2}}$$

$$s_1 = p_1 \cdot \cos^2 \beta = p_1 \cdot \frac{w_2^2 + w_3^2}{|\bar{\mathbf{w}}|^2}$$

$$s_2 = -p_1 \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi_2 = -p_1 \frac{w_1 \cdot w_2}{|\bar{\mathbf{w}}|^2}$$

$$s_3 = -p_1 \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi_3 = -p_1 \frac{w_1 \cdot w_3}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} \quad (3.68)$$

Stosując zasadę superpozycji, można w analogiczny sposób określić udział składowych  $p_2$  oraz  $p_3$  wektora  $\bar{\mathbf{p}}$  w składowych wektora rzutu  $\bar{\mathbf{s}}$  na płaszczyznę „a”. Otrzymuje się wówczas zależności (3.69).

$$s_1 = p_1 \cdot \frac{w_2^2 + w_3^2}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} - p_2 \cdot \frac{w_1 \cdot w_2}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} - p_3 \cdot \frac{w_1 \cdot w_3}{|\bar{\mathbf{w}}|^2}$$

$$s_2 = p_2 \cdot \frac{w_1^2 + w_3^2}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} - p_1 \cdot \frac{w_1 \cdot w_2}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} - p_3 \cdot \frac{w_2 \cdot w_3}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} \quad (3.69)$$

$$s_3 = p_3 \cdot \frac{w_1^2 + w_2^2}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} - p_1 \cdot \frac{w_1 \cdot w_3}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} - p_2 \cdot \frac{w_2 \cdot w_3}{|\bar{\mathbf{w}}|^2}$$

Po zastosowaniu prostych przekształceń algebraicznych uzyskuje się zależności (3.70).

$$\begin{aligned}
s_1 &= p_1 - \frac{w_1}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} \cdot (p_1 \cdot w_1 + p_2 \cdot w_2 + p_3 \cdot w_3) \\
s_2 &= p_2 - \frac{w_2}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} \cdot (p_1 \cdot w_1 + p_2 \cdot w_2 + p_3 \cdot w_3) \\
s_3 &= p_3 - \frac{w_3}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} \cdot (p_1 \cdot w_1 + p_2 \cdot w_2 + p_3 \cdot w_3)
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Przechodząc do przestrzeni  $k$ -wymiarowej i przeprowadzając dowód metodą indukcji matematycznej, można uzyskać zależności na składowe wektora rzutu  $\bar{\mathbf{s}}$  w postaci (3.71).

$$\begin{aligned}
s_1 &= p_1 - \frac{w_1}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} \cdot (p_1 \cdot w_1 + p_2 \cdot w_2 + \dots + p_k \cdot w_k) \\
s_2 &= p_2 - \frac{w_2}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} \cdot (p_1 \cdot w_1 + p_2 \cdot w_2 + \dots + p_k \cdot w_k) \\
&\vdots \\
s_k &= p_k - \frac{w_k}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} \cdot (p_1 \cdot w_1 + p_2 \cdot w_2 + \dots + p_k \cdot w_k)
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Ogólnie:

$$s_i = p_i - \frac{w_i}{|\bar{\mathbf{w}}|^2} \cdot \sum_{j=1}^{j=k} p_j \cdot w_j \quad (i = 1, 2, \dots, k) \tag{3.72}$$

$$|\bar{\mathbf{w}}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_k^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=k} w_i^2}$$

W zagadnieniach omawianych w niniejszej pracy stosowane jest ograniczenie równościowe w postaci (3.24), będące równaniem hiperpłaszczyzny, dla której wszystkie składowe wektora  $\bar{\mathbf{w}}$  do niej prostopadłego są jedynekami.

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{w}} &= [1, 1, \dots, 1] & w_i &= 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\
|\bar{\mathbf{w}}| &= \sqrt{k} & |\bar{\mathbf{w}}|^2 &= k
\end{aligned} \tag{3.73}$$

W takim przypadku zależności (3.71) i (3.72) ulegają uproszczeniu do postaci (3.74) i (3.75).

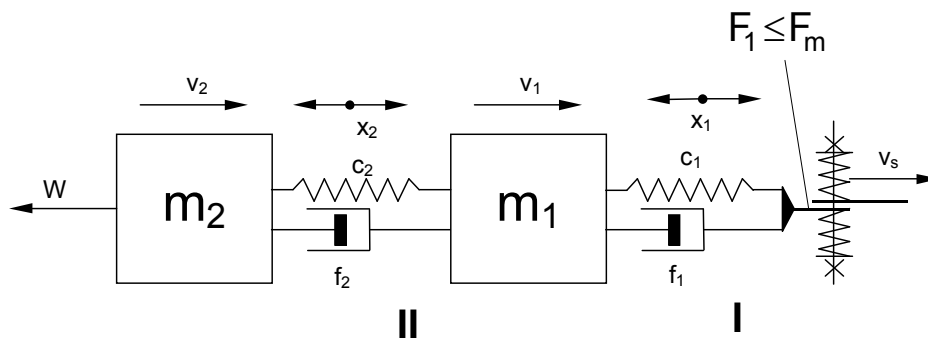
$$\begin{aligned} s_1 &= p_1 - \frac{1}{k} \cdot (p_1 + p_2 + \dots + p_k) \\ s_2 &= p_2 - \frac{1}{k} \cdot (p_1 + p_2 + \dots + p_k) \\ &\vdots \\ s_k &= p_k - \frac{1}{k} \cdot (p_1 + p_2 + \dots + p_k) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ogólnie:

$$s_i = p_i - \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{j=k} p_j \quad (i = 1, 2, \dots k) \quad (3.75)$$

### 3.4. Przykład zastosowania metody.

Niech dany będzie obiekt dynamiczny, którego schemat pokazano na rys. 3.6.



Rys. 3.6. Model dynamiczny obiektu.

Obiekt składa się z dwóch poruszających się wzdłuż linii prostej ciał (elementów) posiadających masy, połączonych więzią lepko-sprężystą II. Ruch układu wymuszony jest za pośrednictwem więzi lepko-sprężystej I, której jeden koniec związany jest z ciałem pierwszym. Drugi koniec więzi porusza się ze znaną zadaną prędkością

$v_s$ . Maksymalna siła  $F_1$  w więzi I została ograniczona (np. ze względu na poślizg) do wartości  $F_m$  ( $F_1 \leq F_m$ ). Z ciałem drugim związana jest siła oporu  $W$ , która w założeniu jest wprost proporcjonalna do prędkości  $v_2$  ciała drugiego, przy czym przy prędkości w ruchu ustalonym  $v_u$  osiąga znaną wartość  $W_u$ .

Określone zostały następujące parametry modelu:

$m_1 = 15 \text{ kg}$	- masa elementu I,
$m_2 = 10 \text{ kg}$	- masa elementu II,
$c_1 = 45 \text{ N/m}$	- sztywność więzi sprężystej I,
$c_2 = 25 \text{ N/m}$	- sztywność więzi sprężystej II,
$f_1 = 3 \text{ N}\cdot\text{s/m}$	- współczynnik oporu tłumienia wiskotycznego więzi I,
$f_2 = 0,3 \text{ N}\cdot\text{s/m}$	- współczynnik oporu tłumienia wiskotycznego więzi II,
$F_m = 16 \text{ N}$	- maksymalna ze względu na poślizg siła w więzi I,
$v_u = 1,5 \text{ m/s}$	- prędkość w ruchu ustalonym,
$W_u = 1 \text{ N}$	- wartość siły oporu $W$ w ruchu ustalonym.

Opis matematyczny modelu utworzony został w oparciu o równania dynamiki Newtona oraz znane zależności kinematyczne. Wyróżnione zostały następujące zmienne stanu modelu ( $\mathbf{x} = [v_1, v_2, x_1, x_2]^T$ ).

$v_1$	- prędkość ciała pierwszego,
$v_2$	- prędkość ciała drugiego,
$x_1 = x_0^I - x_1^I$	- wydłużenie więzi I,
$x_2 = x_1^I - x_2^I$	- wydłużenie więzi II.

Słuszne są poniższe zależności.

$$\begin{aligned}
 m_1 \cdot \frac{dv_1}{dt} &= F_1 - F_2 \\
 m_2 \cdot \frac{dv_2}{dt} &= F_2 - W \\
 \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} - \frac{dx_1^I}{dt} = v_s - v_1 \\
 \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dx_1^I}{dt} - \frac{dx_2^I}{dt} = v_1 - v_2
 \end{aligned}
 \tag{3.76}$$

$$F_1 = c_1 \cdot x_1 + f_1 \cdot (v_s - v_1) \quad \text{- siła w więzi I,}$$

$$F_2 = c_2 \cdot x_2 + f_2 \cdot (v_1 - v_2) \quad \text{- siła w więzi II,}$$

$$W = \frac{W_u}{v_u} \cdot v_2 \quad \text{- siła oporów ruchu.}$$

Po przekształceniach uzyskać można opis matematyczny układu w przestrzeni zmiennych stanu.

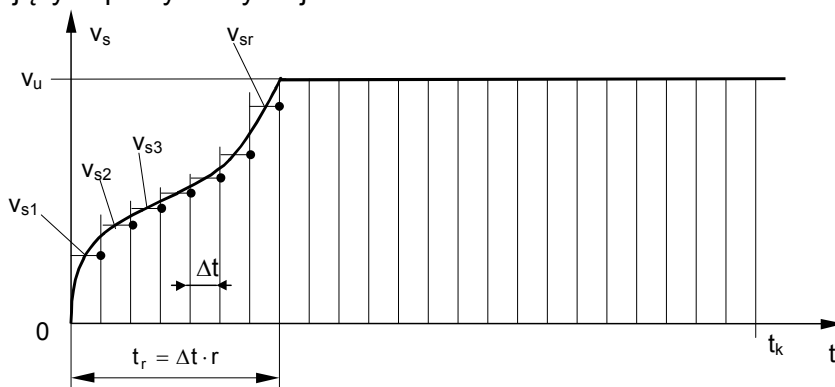
$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{f_1 + f_2}{m_1} \cdot v_1 + \frac{f_2}{m_1} \cdot v_2 + \frac{c_1}{m_1} \cdot x_1 - \frac{c_2}{m_1} \cdot x_2 + \frac{f_1}{m_1} \cdot v_s \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{f_2}{m_2} \cdot v_1 - \left( \frac{f_2}{m_2} + \frac{W_u}{m_2 \cdot v_u} \right) \cdot v_2 + \frac{c_2}{m_2} \cdot x_2 \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -v_1 + v_s$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_1 - v_2$$

Wielkością sterującą jest prędkość końca więzi pierwszej  $v_s$  ( $u = v_s$ ).

W omawianym przykładzie rozważony został rozruch układu przy zmianie prędkości sterującej  $v_s$  od zera do wartości ustalonej  $v_u$  w okresie rozruchu dla  $t \in (0, t_r)$ . Dla czasów  $t > t_r$  wartość prędkości  $v_s$  jest stała i równa  $v_u$ . Pokazano to na rys. 3.7, gdzie zaznaczono również charakter funkcji sterującej jako ciągu prostokątnych impulsów sterujących po dyskretyzacji modelu.



Rys. 3.7. Przebieg sterowania przy rozruchu układu.

Jako wielkości wyjściowe przyjęto siły w więziach I i II, odpowiednio  $F_1$  i  $F_2$ .

Rozwiązanie zadania sterowania optymalnego polega na znalezieniu takiego przebiegu funkcji sterującej w czasie rozruchu (dla czasów  $t \in (0, t_r)$ ), który zapewni minimalną wartość przyjętego wskaźnika jakości sterowania  $I$ . W ujęciu dyskretnym oznacza to znalezienie odpowiedniego ciągu impulsów sterujących  $\{u_i\} = \{u_1, u_2, \dots, u_r\} = \{v_{si}\} = \{v_{s1}, v_{s2}, \dots, v_{sr}\}$  odpowiadających współrzędnym punktu  $\mathbf{U}(u_1, u_2, \dots, u_r) = \mathbf{U}(v_{s1}, v_{s2}, \dots, v_{sr})$  w  $r$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych, należącego do obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  ( $\mathbf{U} \in \Phi$ ) i spełniającego kryterium optymalizacji. Indeksy naturalne, pojawiające się przy elementach ciągów sterowania i współrzędnych punktu  $\mathbf{U}$ , odpowiadają numerom kolejnych kroków całkowania układu dyskretnego (rys. 3.7).

Z układu równań (3.77) wynika, że warunki początkowe równowagi dla sterowania i stanu są zerowe (układ pozostaje w spoczynku, więzi są nienapięte).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= [v_{10}, v_{20}, x_{10}, x_{20}]^T & v_{10} &= 0; & v_{20} &= 0; & x_{10} &= 0; & x_{20} &= 0 \\ \mathbf{u}_0 &= [v_{s0}] & v_{s0} &= 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

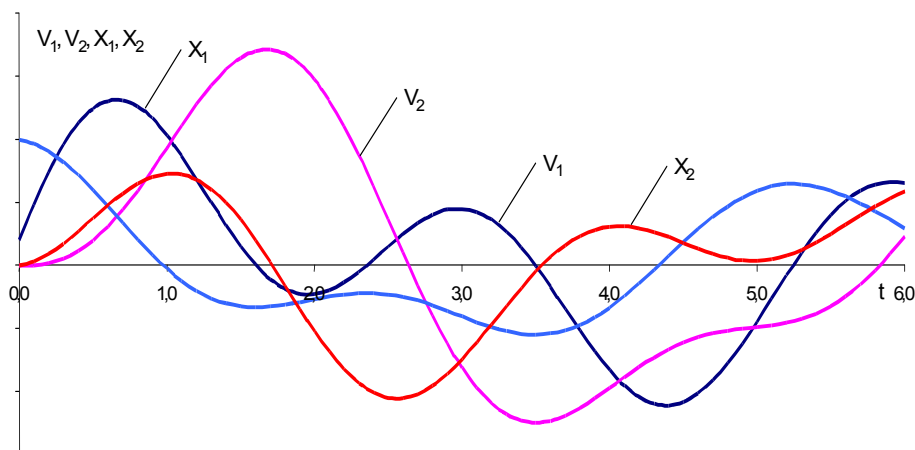
Przyjmując  $v_s = v_u = \text{const}$  i przyrównując prawe strony równań (3.77) do zera, otrzymać można warunki równowagi dla sterowania i stanu odpowiadające ruchowi ustalonemu układu.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= [v_{1u}, v_{2u}, x_{1u}, x_{2u}]^T & v_{1u} &= v_u; & v_{2u} &= v_u; \\ \mathbf{u}_u &= [v_{su}] & v_{su} &= v_u & x_{1u} &= \frac{W_u}{C_1}; & x_{2u} &= \frac{W_u}{C_2} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Przyjęty został wskaźnik jakości pierwszego typu (3.25), który w rozpatrywanym przypadku przyjmuje postać (3.80).

$$\begin{aligned} I(\mathbf{U}) &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (v_{1r} - v_{1u})^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (v_{2r} - v_{2u})^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (x_{1r} - x_{1u})^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (x_{2r} - x_{2u})^2 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Wielkości oznaczone indeksem  $r$  oznaczają składowe wektora stanu w chwili  $t = t_r$  ( $\mathbf{x}_r = [v_{1r}, v_{2r}, x_{1r}, x_{2r}]^T$ ).



Rys. 3.8. Odpowiedź dynamiczna układu na pojedynczy impuls  $\Delta t:1$ .

Wyznaczono odpowiedź dynamiczną układu na pojedynczy impuls sterujący o podstawie  $\Delta t$  i wysokości 1. Wielkość kroku całkowania  $\Delta t$  przyjęto równą 0,001 s. Uzyskano ciągi wartości  $\{V_{1i}\}$ ,  $\{V_{2i}\}$ ,  $\{X_{1i}\}$ ,  $\{X_{2i}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) odpowiednio dla zmiennych stanu  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , których przebiegi przedstawiono na rys 3.8.

Jako sterowanie początkowe przyjęto ciąg impulsów sterujących  $\{v_{si}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) odpowiadający liniowej zmianie prędkości  $v_s$  w czasie  $t \in (0, t_r)$  od zera do  $v_u$ . Współrzędne  $v_{si}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) określają jednocześnie punkt początkowy  $\mathbf{U}_0$  w przestrzeni  $r$ -wymiarowej, od którego zaczyna się poszukiwanie minimum funkcji celu (3.80). Punkt  $\mathbf{U}_0$  należy do obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  ( $\mathbf{U}_0 \in \Phi$ ).

Wykorzystując zależności (3.16) określono wartości zmiennych stanu w chwili  $t_r$  w funkcji przyjętego sterowania.

$$\begin{aligned} v_{1r} &= \sum_{i=1}^{1=r} V_{1(r-i+1)} \cdot u_i & v_{2r} &= \sum_{i=1}^{1=r} V_{2(r-i+1)} \cdot u_i \\ x_{1r} &= \sum_{i=1}^{1=r} X_{1(r-i+1)} \cdot u_i & x_{2r} &= \sum_{i=1}^{1=r} X_{2(r-i+1)} \cdot u_i \end{aligned} \quad (3.81)$$

Na podstawie zależności (3.33) i (3.34) określono wartości pochodnych wskaźnika jakości względem zmiennych  $v_{si}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ).



$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u_i} = \frac{\partial l}{\partial v_{si}} = & m_1 \cdot (v_{1r} - v_{1u}) \cdot V_{1(r-i+1)} + \\ & + m_2 \cdot (v_{2r} - v_{2u}) \cdot V_{2(r-i+1)} + \\ & + c_1 \cdot (x_{1r} - x_{1u}) \cdot X_{1(r-i+1)} + \\ & + c_2 \cdot (x_{2r} - x_{2u}) \cdot X_{2(r-i+1)} \end{aligned} \quad (3.82)$$

Określone zostały składowe wektora największego spadku  $\mathbf{p}$  funkcji celu (3.80) zgodnie z zależnością (3.31).

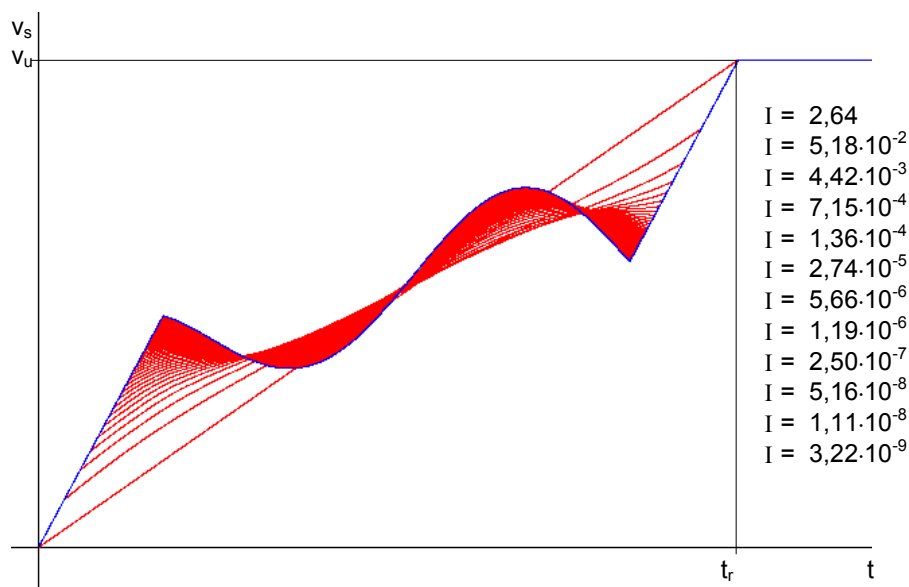
$$\bar{\mathbf{p}} = [p_1, p_2, \dots, p_r]$$

$$p_1 = -\beta \cdot \frac{\partial l}{\partial v_{s1}}, \quad p_2 = -\beta \cdot \frac{\partial l}{\partial v_{s2}}, \quad \dots \quad p_r = -\beta \cdot \frac{\partial l}{\partial v_{sr}} \quad (3.83)$$

Na funkcję sterującą nałożone zostały ograniczenia w postaci (3.20) i (3.21), które określają obszar rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  dla punktu  $\mathbf{U}$  w przestrzeni  $r$ -wymiarowej. Współrzędne punktu  $\mathbf{U}(v_{s1}, v_{s2}, \dots, v_{sr})$  stanowią ciąg impulsów sterujących  $\{v_{si}\} = \{v_{s1}, v_{s2}, \dots, v_{sr}\}$  określających przebieg prędkości  $v_s(t)$  w okresie rozruchu układu dla  $t \in \langle 0, t_r \rangle$ . Fizycznie, zastosowane ograniczenie nakłada na funkcję sterującą  $v_s(t)$  wymaganie, aby jej zakres był ograniczony do przedziału  $\langle 0, v_u \rangle$  oraz aby pochodna  $\frac{dv_s}{dt}$ , czyli przyspieszenie końca więzi I nie było zbyt duże.

Wyniki optymalizacji dla czasu rozruchu  $t_r = 4$  s przedstawiono na rys. 3.9. Pokazano na nim, jak od liniowej funkcji sterującej  $v_s(t)$  w czasie rozruchu dla  $t \in \langle 0, t_r \rangle$  w kolejnych etapach optymalizacji dochodzi się do funkcji sterującej optymalnej. Na rysunku podano również wartości wskaźnika jakości sterowania dla kolejnych etapów optymalizacji.

Łatwo zauważyć działanie metody optymalizacji, która umożliwia określenie coraz bardziej korzystnych (z uwagi na przyjęte kryterium optymalizacji) funkcji sterujących od liniowej do optymalnej, czemu towarzyszy zmniejszanie wartości przyjętego wskaźnika jakości, odpowiadającego energii wewnętrznej układu.

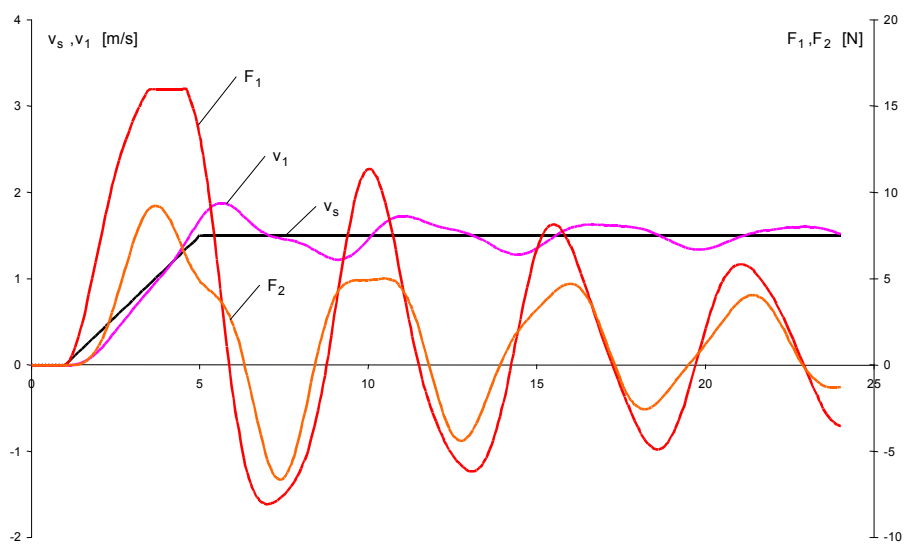


Rys. 3.9. Poszukiwanie optymalnego kształtu funkcji sterującej.

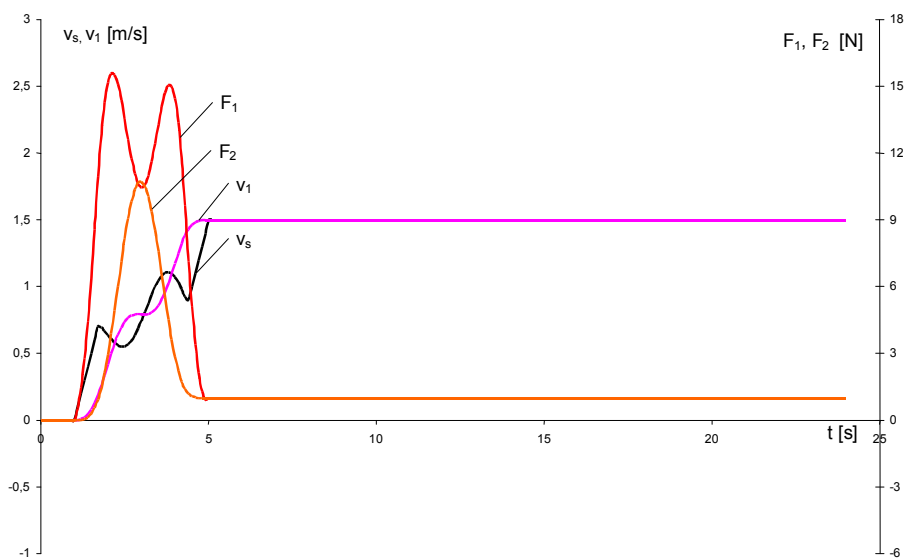
Na rys. 3.10 pokazano przebiegi czasowe sterowania, niektórych zmiennych stanu oraz sił  $F_1$  i  $F_2$  w więziach I i II dla rozruchu przy sterowaniu wg funkcji liniowej, natomiast na rys. 3.11 - przebiegi czasowe tych samych wielkości dla rozruchu przy sterowaniu wg funkcji optymalnej.

Przy sterowaniu wg funkcji liniowej rozruchowi układu towarzyszy wzbudzenie stosunkowo dużych drgań oraz późniejsza dysypacja energii wewnętrznej. Ponadto siła  $F_1$  w więzi I osiąga dużą wartość i zostaje ograniczona do wartości dopuszczalnej  $F_m$ , co można zauważyć na rys. 3.10.

Przy sterowaniu wg funkcji optymalnej uzyskuje się zmniejszenie przyjętego wskaźnika jakości sterowania, który odpowiada energii wewnętrznej układu na koniec okresu rozruchu. Efekt optymalizacji polega na tym, że drgania układu zostają wzbudzone jedynie w okresie rozruchu, natomiast po jego zakończeniu są całkowicie wytłumione. Przy sterowaniu optymalnym ruch ustalony układu przebiega przy całkowitym braku drgań i bez dysypacji energii drgań.



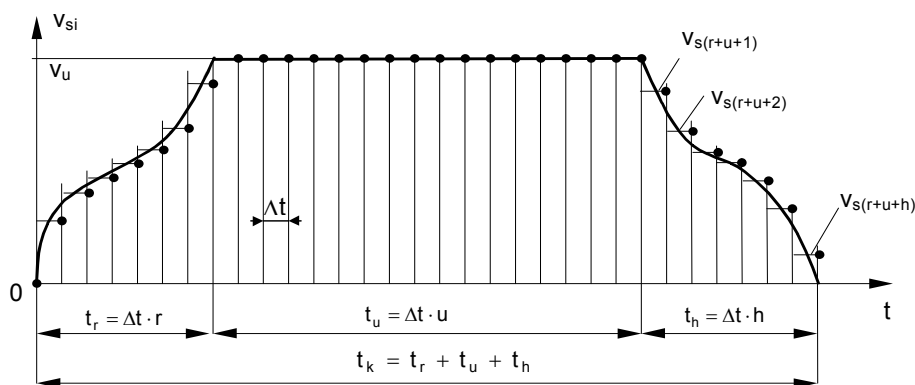
Rys. 3.10. Przebiegi czasowe sterowania, prędkości i sił w więziach przy rozruchu wg liniowej funkcji sterującej.



Rys. 3.11. Przebiegi czasowe sterowania, prędkości i sił w więziach przy rozruchu wg optymalnej funkcji sterującej.

Dodatkowym efektem optymalizacji jest zmniejszenie maksymalnych wartości sił w więziach poniżej wartości dopuszczalnych. Widać to wyraźnie na rys. 3.11.

W następnym etapie zadanie optymalizacji rozszerzono na okres całego ruchu roboczego rozważanego układu. Przyjęto mianowicie, że rozruch w czasie  $t_r$  i ruch ustalony w czasie  $t_u$  przebiegają według zdeterminowanej, wyznaczonej wcześniej, optymalnej funkcji sterującej (rozruch optymalny i ruch ustalony ze stałą prędkością), natomiast optymalizacji podlega teraz jedynie funkcja sterująca w okresie hamowania  $t_h$ . Przykładowy kształt funkcji sterującej w ruchu roboczym w ujęciu ciągłym i dyskretnym pokazano na rys. 3.12.



Rys. 3.12. Kształt funkcji sterującej w ruchu roboczym.

Rozwiązanie zadania sterowania optymalnego polega na znalezieniu takiego przebiegu funkcji sterującej w czasie hamowania (dla czasów  $t \in (t_r+t_u, t_r+t_u+t_h)$ ), który zapewni minimalną wartość przyjętego wskaźnika jakości sterowania  $I$ . W ujęciu dyskretnym oznacza to znalezienie odpowiedniego ciągu impulsów sterujących  $\{u_i\} = \{u_{r+u+1}, u_{r+u+2}, \dots, u_{r+u+h}\} = \{v_{si}\} = \{v_{s(r+u+1)}, v_{s(r+u+2)}, \dots, v_{s(r+u+h)}\}$  odpowiadających współrzędnym punktu  $\mathbf{U}(u_{r+u+1}, u_{r+u+2}, \dots, u_{r+u+h}) = \mathbf{U}(v_{s(r+u+1)}, v_{s(r+u+2)}, \dots, v_{s(r+u+h)})$  w  $h$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych, należącego do obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  ( $\mathbf{U} \in \Phi$ ) i spełniającego kryterium optymalizacji. Indeksy, pojawiające się przy elementach ciągów sterowania i współrzędnych punktu  $\mathbf{U}$  i zawierające kombinacje arytmetyczne liczb naturalnych  $r, u, h$ ,

odpowiadają numerom kolejnych kroków całkowania układu dyskretnego (rys. 3.12).

Warunki początkowe dla hamowania odpowiadają warunkom ustalonym danym zależnościami (3.79). Po zahamowaniu dla czasu  $t \rightarrow \infty$  układ dąży do zerowych warunków równowagi dla sterowania i zmiennych stanu danych zależnościami (3.78). Wobec tego przyjęty został wskaźnik jakości pierwszego typu (3.25), który w rozpatrywanym przypadku przyjmuje postać (3.84).

$$I(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1k}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_{2k}^2 + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot x_{1k}^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot x_{2k}^2 \quad (3.84)$$

Wielkości oznaczone indeksem  $k$  oznaczają składowe wektora stanu w chwili końca ruchu roboczego dla  $t = t_k = t_r + t_u + t_h$  ( $\mathbf{x}_k = [v_{1k}, v_{2k}, x_{1k}, x_{2k}]^T$ ).

Wykorzystując odpowiedź dynamiczną układu na pojedynczy impuls sterujący o podstawie  $\Delta t$  i wysokości 1 (ciągi wartości  $\{V_{1i}\}$ ,  $\{V_{2i}\}$ ,  $\{X_{1i}\}$ ,  $\{X_{2i}\}$  odpowiednio dla zmiennych stanu  $v_1, v_2, x_1, x_2$ ) uzależniono wartości zmiennych stanu w chwili  $t_k$  od ciągu poprzedzających impulsów sterujących, przy czym impulsy odpowiadające czasowi rozruchu i ruchu ustalonego są niezmiennie jako wyznaczone wcześniej (indeksy od 1 do  $r+u$ ), natomiast poszukiwane są impulsy sterujące odpowiadające czasowi hamowania (indeksy od  $r+u+1$  do  $r+u+h$ ).

Jako sterowanie początkowe przyjęto ciąg impulsów sterujących  $\{v_{si}\}$  ( $i = r+u+1, r+u+2, \dots, r+u+h$ ) odpowiadający liniowej zmianie prędkości  $v_s$  w czasie  $t \in (t_r+t_u, t_r+t_u+t_h)$  od wartości  $v_u$  do zera. Współrzędne  $v_{si}$  ( $i = r+u+1, r+u+2, \dots, r+u+h$ ) określają jednocześnie punkt początkowy  $\mathbf{U}_0$  w przestrzeni  $h$ -wymiarowej, od którego zaczyna się poszukiwanie minimum funkcji celu (3.84). Punkt  $\mathbf{U}_0$  należy do obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  ( $\mathbf{U}_0 \in \Phi$ ).

Wykorzystując zależności (3.16) określono wartości zmiennych stanu w chwili  $t_k$  w funkcji przyjętego sterowania.

$$\begin{aligned}
 v_{1k} &= \sum_{i=1}^{1=r+u} V_{1(k-i+1)} \cdot u_i + \sum_{i=r+u+1}^{1=k} V_{1(k-i+1)} \cdot u_i & \sum_{i=1}^{1=r+u} V_{1(k-i+1)} \cdot u_i &= \text{const} \\
 v_{2r} &= \sum_{i=1}^{1=r+u} V_{2(k-i+1)} \cdot u_i + \sum_{i=r+u+1}^{1=k} V_{2(k-i+1)} \cdot u_i & \sum_{i=1}^{1=r+u} V_{2(k-i+1)} \cdot u_i &= \text{const} \\
 x_{1r} &= \sum_{i=1}^{1=r+u} X_{1(k-i+1)} \cdot u_i + \sum_{i=r+u+1}^{1=k} X_{1(k-i+1)} \cdot u_i & \sum_{i=1}^{1=r+u} X_{1(k-i+1)} \cdot u_i &= \text{const} \\
 x_{2k} &= \sum_{i=1}^{1=r+u} X_{2(k-i+1)} \cdot u_i + \sum_{i=r+u+1}^{1=k} X_{2(k-i+1)} \cdot u_i & \sum_{i=1}^{1=r+u} X_{2(k-i+1)} \cdot u_i &= \text{const}
 \end{aligned}
 \tag{3.85}$$

Na podstawie zależności (3.33) i (3.34) określono wartości pochodnych wskaźnika jakości względem zmiennych  $v_{si}$  ( $i = r+u+1, r+u+2, \dots, r+u+h$ ).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l}{\partial u_i} = \frac{\partial l}{\partial v_{si}} &= m_1 \cdot v_{1k} \cdot V_{1(k-i+1)} + m_2 \cdot v_{2k} \cdot V_{2(k-i+1)} + \\
 &+ c_1 \cdot x_{1k} \cdot X_{1(k-i+1)} + c_2 \cdot x_{2k} \cdot X_{2(k-i+1)}
 \end{aligned}
 \tag{3.86}$$

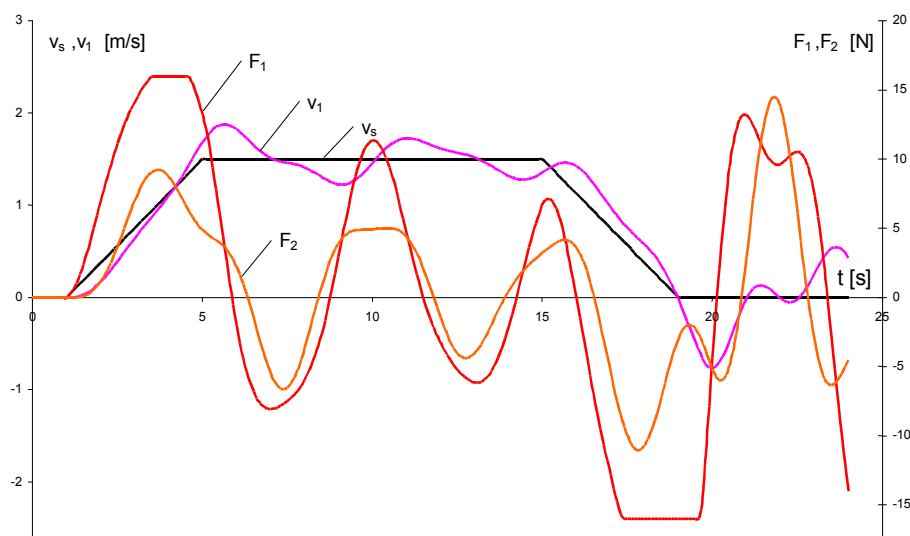
Określone zostały składowe wektora największego spadku  $\mathbf{p}$  funkcji celu (3.87) zgodnie z zależnością (3.31).

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{p}} &= [p_{r+u+1}, p_{r+u+2}, \dots, p_{r+u+h}] \\
 p_{r+u+1} &= -\beta \cdot \frac{\partial l}{\partial v_{s(r+u+1)}}, p_{r+u+2} = -\beta \cdot \frac{\partial l}{\partial v_{s(r+u+2)}}, \dots \\
 \dots p_{r+u+h} &= -\beta \cdot \frac{\partial l}{\partial v_{s(r+u+h)}}
 \end{aligned}
 \tag{3.87}$$

Na funkcję sterującą nałożone zostały ograniczenia w postaci (3.20) i (3.21), zmodyfikowane do okresu hamowania, które określają obszar rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  dla punktu  $\mathbf{U}$  w przestrzeni h-wymiarowej. Jak wiadomo, współrzędne punktu  $\mathbf{U}$  ( $v_{s(r+u+1)}, v_{s(r+u+2)}, \dots, v_{s(r+u+h)}$ ) stanowią ciąg impulsów sterujących  $\{v_{si}\} = \{v_{s(r+u+1)}, v_{s(r+u+2)}, \dots, v_{s(r+u+h)}\}$  określających przebieg prędkości  $v_s(t)$  w okresie hamowania układu dla  $t \in (t_r+t_u, t_r+t_u+t_h)$ . Fizycznie, podobnie jak przy rozruchu, zastosowane ograniczenie nakłada na funkcję sterującą

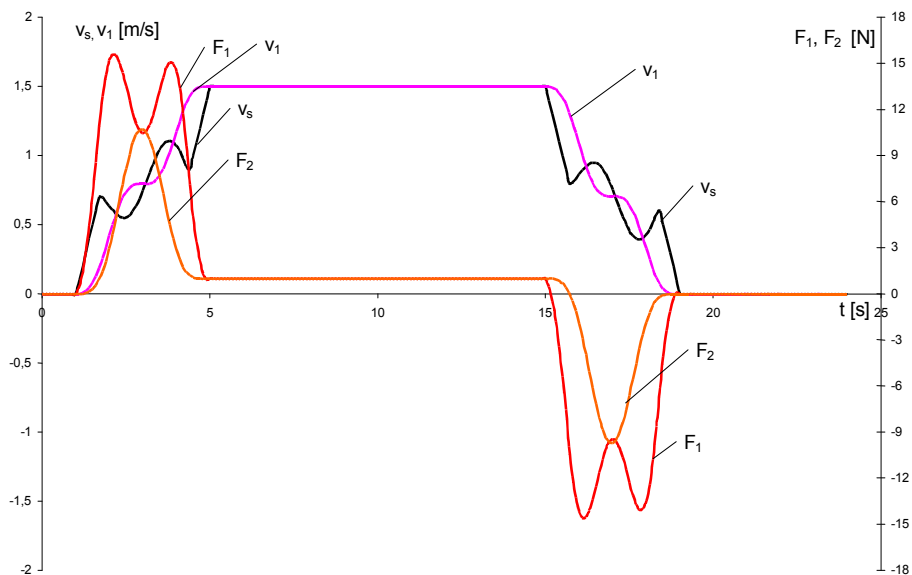
$v_s(t)$  wymaganie, aby jej zakres był ograniczony do przedziału  $\langle 0, v_u \rangle$  oraz aby pochodna  $\frac{dv_s}{dt}$ , czyli przyspieszenie końca więzi I nie było zbyt duże co do wartości bezwzględnej.

Wyniki optymalizacji dla całego ruchu roboczego pokazano na rysunkach 3.13 i 3.14. Przyjęto czas rozruchu  $t_r = 4$  s, czas ruchu ustalonego  $t_u = 10$  s i czas hamowania  $t_h = 4$  s. Na rys. 3.13 pokazano przebiegi czasowe sterowania, niektórych zmiennych stanu oraz sił  $F_1$  i  $F_2$  w więziach I i II przy sterowaniu wg funkcji liniowej w okresach rozruchu i hamowania, natomiast na rys. 3.14 - przebiegi czasowe tych samych wielkości przy sterowaniu wg funkcji optymalnej w okresach rozruchu i hamowania.



Rys. 3.13. Przebiegi czasowe sterowania, prędkości i sił w więziach przy sterowaniu wg funkcji liniowej w całym ruchu roboczym.

Łatwo zauważyć, że zastosowanie sterowania optymalnego w całym ruchu roboczym pogłębia efekt optymalizacji. Uzyskuje się znaczne zmniejszenie przyjętego wskaźnika jakości sterowania, który odpowiada energii wewnętrznej układu na koniec ruchu roboczego. Drgania układu zostają wzbudzone jedynie w okresie rozruchu i hamowania, natomiast po zakończeniu tych okresów są one całkowicie wytłumione, nie ma zatem spowodowanej nimi dysypacji energii.



Rys. 3.14. Przebiegi czasowe sterowania, prędkości i sił w więziach przy sterowaniu wg funkcji optymalnej w całym ruchu roboczym.

Ponadto dla obu rodzajów sterowania, liniowego i optymalnego, sprawdzono bilans energetyczny ruchu roboczego układu w czasie  $t_k$  obejmującym rozruch, ruch ustalony i hamowanie ( $t_k = t_r + t_u + t_h$ ). Określono pracę  $L$  wykonaną przez siłę napędową, równą sile  $F_1$  w więzi I i przyłożoną w punkcie poruszającym się z zadaną prędkością  $v_s$ .

$$L = \int_0^{t_k} N \cdot dt \quad (3.88)$$

$$N = F_1 \cdot v_s = [c_1 \cdot x_1 + f_1 \cdot (v_s - v_1)] \cdot v_s$$

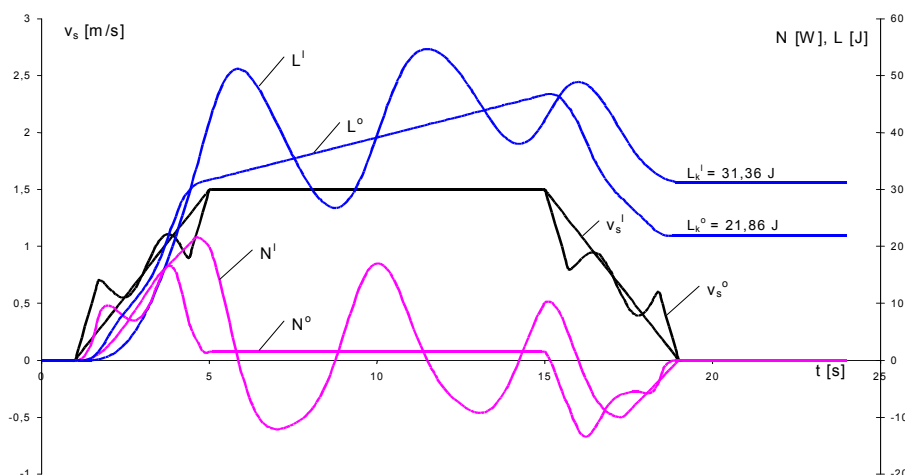
Pracę  $L$  obliczono metodą Eulera jako całkę mocy  $N$  siły  $F_1$  przyłożonej do końca więzi I poruszającego się z prędkością  $v_s$ . Po dyskretyzacji zależności (3.88) przyjmą postać (3.89).



$$L = h \cdot \sum_{i=1}^{i=k} N_i$$

(3.89)

$$N_i = \frac{dL}{dt} \Big|_{t=t_i} = [c_1 \cdot x_{1i} + f_1 \cdot (v_{s(i+1)} - v_{1i})] \cdot v_{s(i+1)}$$

Rys. 3.15. Przebiegi mocy  $N$  i pracy  $L$  dostarczonej do układu.

Na rys. 3.15 przedstawiono przebiegi czasowe mocy  $N$  i pracy  $L$  odpowiadające sterowaniu wg funkcji liniowej (indeks „l”) oraz optymalnej (indeks „o”) z określeniem wartości pracy wykonanej do chwili  $t = t_k$ .

Czasy  $t_k$  w obu przebiegach zostały określone tak, aby odpowiadały temu samemu przemieszczeniu  $s_k$  punktu zaczepienia siły  $F_1$ , co jest niezbędne dla porównania ruchów pod względem energetycznym.

$$s_k = \int_0^{t_k} v_s \cdot dt = \text{const} \quad (3.90)$$

$$s_k = h \cdot \sum_{i=1}^{i=k} v_{si} = \text{const}$$

Bilans energetyczny dla sterowania optymalnego jest bardziej korzystny w porównaniu ze sterowaniem liniowym. Wy tłumaczyć to

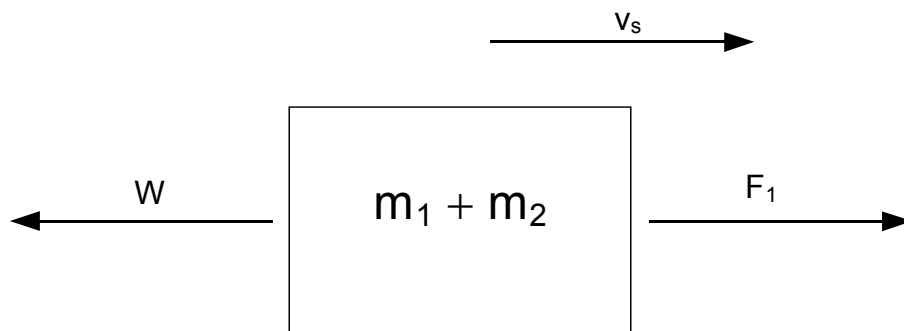
można faktem, że praca dostarczona do układu zostaje zużyta na nadanie mu energii kinetycznej, pokonanie oporów ruchu oraz przyrost energii wewnętrznej rozumianej jako energia drgań. W przypadku sterownia optymalnego minimalizacji ulega energia wewnętrzna układu (brak drgań), co oznacza, że praca dostarczona do układu jest mniejsza o ten właśnie składnik.

Podsumowując przedstawiony przykład można stwierdzić, że zaproponowana metoda optymalizacji umożliwia znalezienie optymalnego sterowania dla układu dynamicznego, który można opisać modelem liniowym. W przykładzie przedstawiono model rzędu IV, jednak metoda nie nakłada tu żadnych ograniczeń.

Efekt optymalizacji jest widoczny. Po zakończeniu rozruchu i hamowania układ pozostaje bez drgań, co podnosi jego walory eksploatacyjne. Towarzyszy temu podniesienie sprawności globalnej ruchu roboczego, mierzonej jako stosunek pracy  $L_u$ , którą należałoby wykonać nad układem w przypadku więzi sztywnych (nieodkształcalnych), do pracy  $L$  wykonanej w przypadku układu o więziach podatnych, przy tym samym sterowaniu.

$$\eta_o = \frac{L_u}{L} \quad (3.91)$$

Pracę  $L_u$  można określić, „usztyniając” układ przedstawiony na rys. 3.6, tzn. traktując więzi I i II jako sztywne. Uzyskuje się wtedy model uproszczony, pokazany na rys. 3.16.



Rys. 3.16. Model uproszczony po „usztynieniu” układu.

Opis matematyczny modelu uproszczonego określają zależności (3.92).

$$(m_1 + m_2) \cdot \frac{dv_s}{dt} = F_1 - W \quad (3.92)$$

$$W = \frac{W_m}{v_u} \cdot v_s$$

Wartość siły  $F_1$ , jej moc oraz pracę wykonaną w czasie  $t_k$  obejmującym cały ruch roboczy określają zależności (3.93).

$$F_1 = (m_1 + m_2) \cdot \frac{dv_s}{dt} + \frac{W_m}{v_u} \cdot v_s$$

$$N = F_1 \cdot v_s = (m_1 + m_2) \cdot v_s \cdot \frac{dv_s}{dt} + \frac{W_m}{v_u} \cdot v_s^2$$

$$L_u = \int_0^{t_k} N \cdot dt = \int_0^{t_k} (m_1 + m_2) \cdot v_s \cdot \frac{dv_s}{dt} \cdot dt + \int_0^{t_k} \frac{W_m}{v_u} \cdot v_s^2 \cdot dt = \quad (3.93)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v_u^2 + \frac{W_m}{v_u} \cdot \int_0^{t_k} v_s^2 \cdot dt$$

przy czym dla  $t = t_k$   $v_s = v_u$

Pierwszy składnik pracy  $L_u$  odpowiada energii kinetycznej uzyskanej przez układ i nie zależy od kształtu funkcji sterującej  $v_s(t)$ . W rozważanym przypadku, kiedy układ startuje i kończy przy zerowej prędkości, składnik ten jest równy zero. Natomiast drugi składnik odpowiada pracy potrzebnej na pokonanie oporów ruchu jest ściśle zależny od charakteru ruchu. Prace  $L_u$  oraz  $L$  potrzebne dla wyznaczenia sprawności globalnej  $\eta_o$ , danej zależnością (3.91), są obliczone dla układu „usztynionego” i układu z więziami podatnymi przy tym samym czasie  $t_k$  i identycznej funkcji sterującej  $v_s(t)$ , co gwarantuje w obu przypadkach przebycie tej samej drogi  $s_k$  przez punkt zaczepienia siły  $F_1$  według zależności (3.90).

Po dyskretyzacji wartość pracy  $L_u$  określa wyrażenie (3.94).

$$L_u = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v_u^2 + \frac{W_m}{v_u} \cdot h \cdot \sum_{i=1}^{i=k} v_{si}^2 \quad (3.94)$$

W omawianym przykładzie sprawność globalna wynosi:

- przy sterowaniu wg funkcji liniowej  $\eta_o^l = 0,64$ ,
- przy sterowaniu wg funkcji optymalnej  $\eta_o^o = 0,85$ ,

W obu przypadkach droga  $s_k$  punktu zaczepienia siły  $F_1$  jest taka sama i równa 21 m.

### **3.5. Analityczne wyznaczanie optymalnych funkcji sterujących dla prostych układów liniowych II rzędu.**

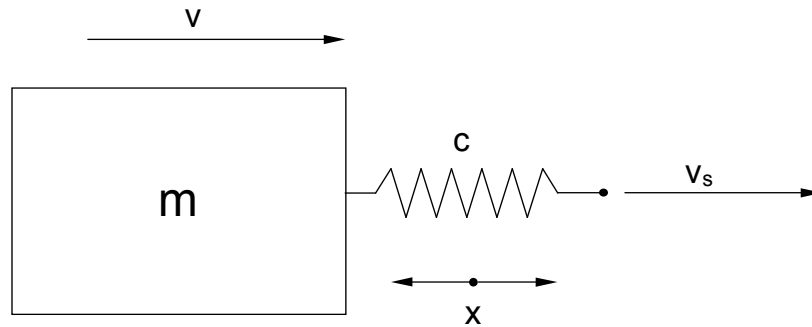
W przypadku, kiedy obiekt dynamiczny jest liniowy, pozbawiony tłumienia i jego rząd jest nie większy od dwóch oraz istnieje tylko jedna wielkość sterująca  $u$ , można optymalną funkcję sterującą wyznaczyć analitycznie. W literaturze (praca [67]) pojawiają się propozycje optymalnych funkcji sterujących stanowiących kombinację funkcji liniowej oraz trygonometrycznej. Jeżeli wartość sterowania w chwili początkowej  $t = 0$  jest równa zero ( $u_0 = 0$ ), natomiast w chwili końca sterowania i później dla  $t \geq t_k$  zmienna sterująca osiąga stałą wartość  $u_k$ , to przy zastosowaniu wskaźnika jakości pierwszego typu danego zależnością (3.25) proponowana optymalna funkcja sterująca dla  $t \in \langle 0, t_k \rangle$  opisana jest zależnością (3.95).

$$u(t) = \frac{u_k}{t_k} \cdot t + K \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{t_k} \cdot t \quad (3.95)$$

Główną trudnością w wyznaczeniu tej postaci funkcji sterującej jest określenie amplitudy  $K$  funkcji trygonometrycznej w (3.95), zależnej od parametrów dynamicznych układu.

Poniżej przedstawiony został sposób wyznaczania optymalnej funkcji sterującej dla prostego układu dynamicznego pokazanego na rys. 3.17.

Rozważany obiekt dynamiczny stanowi ciało o masie  $m = 100$  kg, które może poruszać się wzdłuż linii prostej i wprawiane jest w ruch za pośrednictwem więzi sprężystej o sztywności  $c = 100$  N/m. Jeden koniec więzi związany jest z poruszającym się ciałem, a drugi porusza się wzdłuż prostej ze znaną prędkością  $v_s$  [m/s] stanowiącą sterowanie układu. Przyjęto czas końca sterowania (rozruchu)  $t_r = 4$  s oraz wartość sterowania na koniec rozruchu  $v_u = 1$  m/s.



Rys. 3.17. Przykładowy obiekt dynamiczny dla wyznaczenia optymalnej funkcji sterującej metodą analityczną.

Jako zmienne stanu modelu wybrano:

$v$  - prędkość ciała o masie  $m$ ,

$x$  - wydłużenie więzi sprężystej.

Zależności opisujące ruch układu mają postać (3.96).

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = c \cdot x \quad \frac{dx}{dt} = v_s - v \quad (3.96)$$

Eliminując z równań (3.96) zmienną  $v$  oraz jej pochodną uzyskuje się równanie różniczkowe II rzędu ze względu na zmienną  $x$ .

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \cdot x = \frac{dv_s}{dt} \quad (3.97)$$

Przebieg funkcji sterującej przyjęto w postaci (3.95) zmodyfikowanej do (3.98).

$$v_s = \frac{v_u}{t_r} \cdot t + K \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t_r} \cdot t \quad \text{dla } 0 \leq t \leq t_r \quad (3.98)$$

$$v_s = v_u = \text{const} \quad \text{dla } t > t_r$$

$n$  - dowolna liczba naturalna.

Poszukiwana jest taka wartość amplitudy  $K$ , która umożliwi osiągnięcie przez układ stanu ustalonego (bez drgań) dla czasu  $t > t_r$ , co odpowiada prędkości  $v = v_u$  oraz wydłużeniu więzi  $x = 0$ .

Różniczkując wyrażenie na  $v_s$  dla  $t \in \langle 0, t_r \rangle$  i podstawiając je do (3.97) otrzymuje się równanie różniczkowe liniowe niejednorodne II rzędu.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{v_u}{t_r} + K \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3.99)$$

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} \quad \omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t_r}$$

Jak wiadomo, rozwiązanie równania (3.99) jest sumą całki ogólnej równania jednorodnego oraz całki szczególnej równania pełnego. Łatwo wykazać, że pierwszy składnik rozwiązania ma postać (3.100).

$$x_{og} = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (3.100)$$

Symbole A i B oznaczają dowolne stałe.

Drugi składnik rozwiązania wyznacza się metodą przewidywań stosownie do prawej strony równania (3.99).

$$x_{sz} = C + D \cdot \sin(\omega \cdot t) + E \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3.101)$$

Stałe C, D i E wyznacza się podstawiając po dwukrotnym różniczkowaniu wyrażenie (3.101) do (3.99) i porównując współczynniki przy odpowiednich wyrażeniach. Otrzymuje się wówczas zależności (3.102).

$$C = \frac{v_u}{\omega_0^2 \cdot t_r} \quad D = 0 \quad E = \frac{K \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.102)$$

Podstawiając (3.102) do (3.101) oraz sumując całki ogólną i szczególną, otrzymuje się wyrażenie na rozwiązanie ogólne równania (3.99).

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{v_u}{\omega_0^2 \cdot t_r} + \frac{K \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3.103)$$

Stałe A i B wyznacza się, korzystając ze znanych warunków początkowych. Dla  $t = 0$  mamy bowiem  $x = 0$  oraz  $\frac{dx}{dt} = v_s - v = 0$ . Po dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymuje się zależności (3.104).

$$A = 0 \quad B = -\frac{v_u}{\omega_0^2 \cdot t_r} - \frac{K \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.104)$$

Chcąc uniezależnić rozwiązanie (3.103) od drgań własnych, należy tak dobrać amplitudę K, aby również i stała B była równa zero. Wartość K określona jest wówczas wg zależności (3.105).

$$B = -\frac{v_u}{\omega_0^2 \cdot t_r} - \frac{K \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \Rightarrow K = -\frac{v_u}{\omega_0^2 \cdot t_r} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} \quad (3.105)$$

Po podstawieniu (3.105) do (3.103) otrzymuje się (3.106).

$$x = \frac{v_u}{\omega_0^2 \cdot t_r} \cdot [1 - \cos(\omega \cdot t)]$$

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} \quad \omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t_r} \quad (3.106)$$

$$x = \frac{m \cdot v_u}{c \cdot t_r} \cdot \left[ 1 - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t_r} \cdot t \right]$$

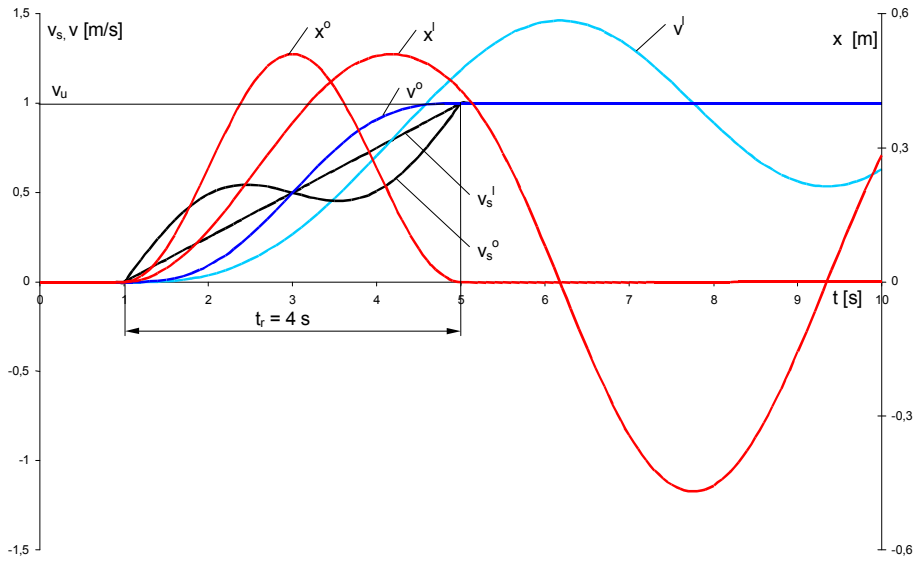
Łatwo sprawdzić, że dla czasu  $t = t_u$  wartość  $x = 0$  oraz  $\frac{dx}{dt} = v_s - v = 0$ , co oznacza  $v = v_s = v_u$ , czyli ruch ustalony bez oscylacji dla czasów  $t > t_u$ , bowiem wymuszenie  $v_s$  jest wówczas stałe i równe  $v_u$ .

Można zatem dla rozważanego układu stosować optymalną funkcję sterującą w postaci (3.107) przyjmując dowolną wartość naturalną  $n$ .

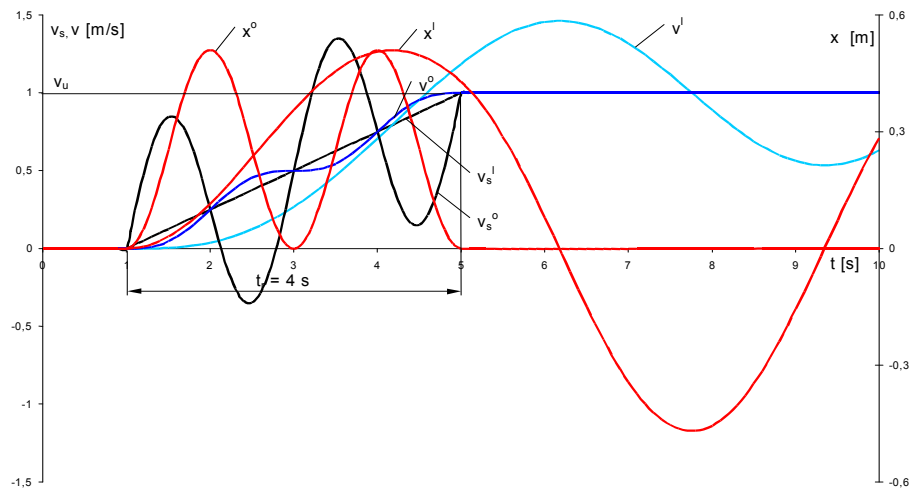
$$v_s = \frac{v_u}{t_r} \cdot t - \frac{v_u}{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \frac{\frac{c}{m} - \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t_r} \right)^2}{\frac{c}{m}} \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t_r} \cdot t \quad \text{dla } 0 \leq t \leq t_r$$

$$v_s = v_u = \text{const} \quad \text{dla } t > t_r \quad (3.107)$$

Na rysunkach 3.18 ÷ 3.20 zamieszczono wyniki badań symulacyjnych omawianego układu rozwiązane metodą Eulera. Pokazano przebiegi czasowe wydłużenia więzi sprężystej  $x$  oraz prędkości ciała  $v$  dla wymuszenia wg funkcji liniowej oraz optymalnej w postaci (3.107) przy różnych wartościach  $n$  (odpowiednio  $n = 1; 2; 3$ ). Wykresy odpowiadające sterowaniu liniowemu oznaczono symbolem „l”, natomiast sterowaniu optymalnemu – symbolem „o”.

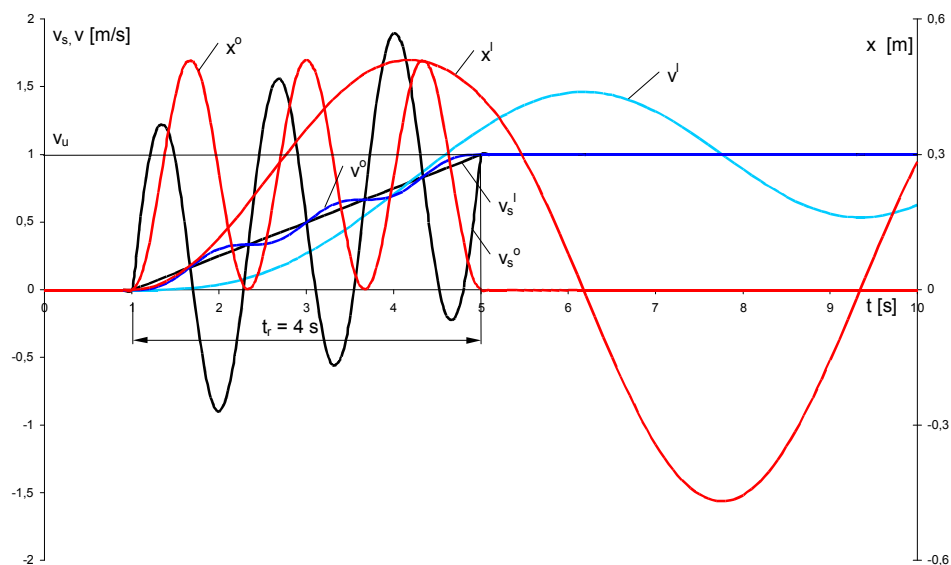


Rys. 3.18. Wymuszenie liniowe i optymalne ( $n = 1$ ).  
Przebiegi czasowe wydłużenia  $x$  i prędkości  $v$ .



Rys. 3.19. Wymuszenie liniowe i optymalne ( $n = 2$ ).  
Przebiegi czasowe wydłużenia  $x$  i prędkości  $v$ .

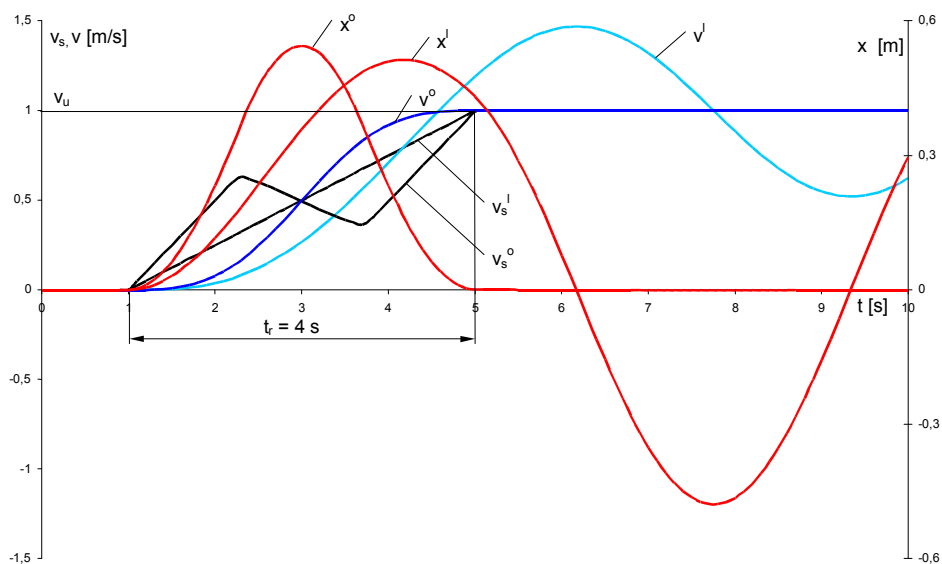




Rys. 3.20. Wymuszenie liniowe i optymalne ( $n = 3$ ).  
Przebiegi czasowe wydłużenia  $x$  i prędkości  $v$ .

Widać wyraźnie, że przy zastosowaniu sterowania optymalnego w postaci (3.107) drgania układu wzbudzone zostają jedynie w okresie rozruchu, natomiast po jego zakończeniu układ porusza się bez drgań, co odpowiada zerowej wartości wskaźnika jakości sterowania w postaci (3.25). Jest oczywiste, że w praktycznych zastosowaniach używana jest na ogół optymalna funkcja sterująca dla wartości naturalnej  $n = 1$ .

Dodatkowo dla rozpatrywanego układu wyznaczono optymalną funkcję sterującą metodą rzutowania wektora największego spadku, opisaną wcześniej w podrozdziale 3.3. Wyniki optymalizacji przedstawiono na rys. 3.21 zamieszczając przebiegi czasowe wydłużenia  $x$  i prędkości  $v$  dla sterowania wg funkcji liniowej (indeks „i”) oraz optymalnej (indeks „o”).



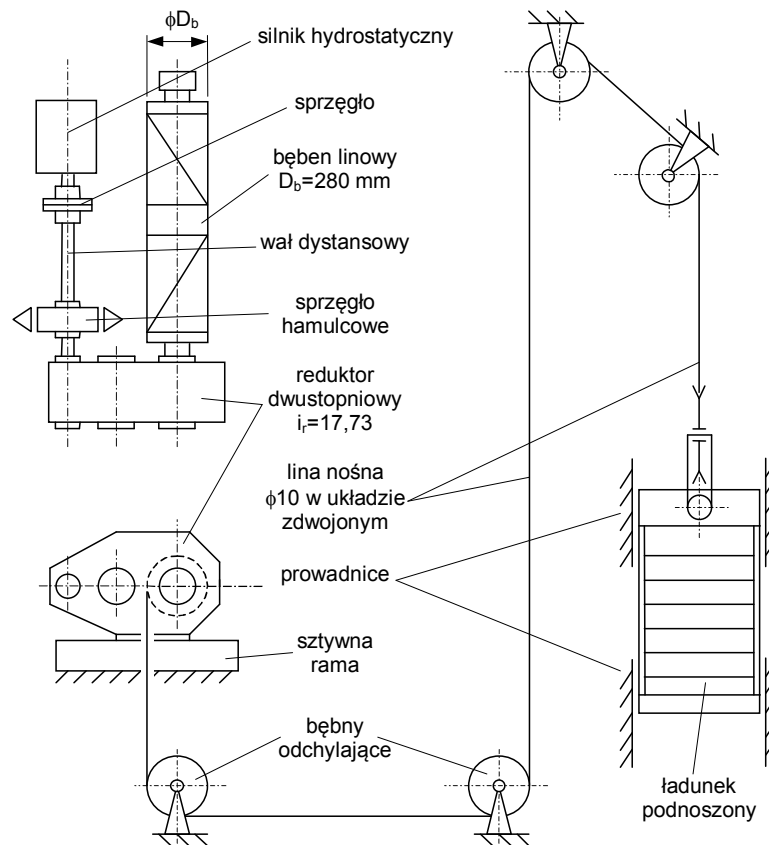
Rys. 3.21. Wymuszenie liniowe i optymalne wyznaczone wg metody. Przebiegi czasowe wydłużenia  $x$  i prędkości  $v$ .

Łatwo zauważyć dobry efekt optymalizacji mimo nieco innego kształtu funkcji sterującej w okresie rozruchu.

W następnych rozdziałach pracy omówione zostaną sposoby wyznaczania sterowań optymalnych dla konkretnych mechanizmów maszyn roboczych.

#### 4. OPTIMALIZACJA ROZRUCHU WCIĄGARKI Z NAPĘDEM HYDROSTATYCZNYM.

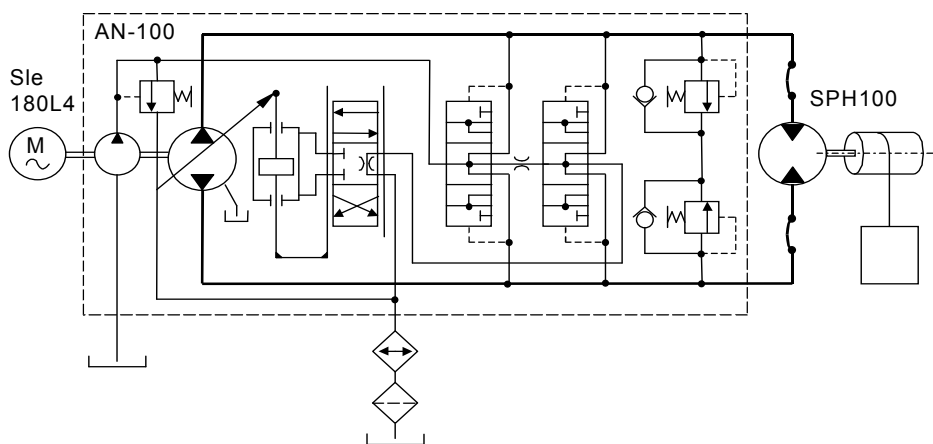
W Zakładzie Maszyn Roboczych i Napędów Hydraulicznych Politechniki Łódzkiej zbudowana została wciągarka bębnowa z napędem hydrostatycznym, której schemat pokazano na rys. 4.1.



Rys. 4.1. Schemat mechanizmu podnoszenia.

Silnik hydrostatyczny o stałej chłonności SPH-100 napędza bęben linowy o średnicy  $D_b = 280$  mm poprzez dwa sprzęgła zębate, wał dystansowy oraz reduktor dwustopniowy o przełożeniu  $i_r = 17,73$ . Z bębniem związany jest dwupasmowy zdwojony układ linowy (średnica liny  $d = 10$  mm), który poprowadzony przez zespół bębniów i krążków odchylających może napędzać obciążnik o masie 1250 kg. Obciążnik porusza się pionowo w prowadnicach w 20-metrowym szybie doświadczalnym.

Schemat hydrauliczny układu napędowego pokazano na rys. 4.2.



Rys. 4.2. Schemat hydrauliczny układu napędowego.

Zespół napędowy zawiera typową przekładnię hydrostatyczną składającą się z pompy wielotłoczkowej osiowej AN-100 o zmiennej wydajności z wychylnym blokiem cylindrów współpracującej w obiegu zamkniętym z szybkobieżnym silnikiem wielotłoczkowym osiowym SPH-100 o stałej chłonności z wychylnym korpusem. Przekładnia zaopatrzona jest w układ przepłukujący - doładujący oraz nadążny układ sterowania wydajnością jednostkową pompy, oba zasilane z pomocniczej pompy zębatej umieszczonej na wale pompy głównej. Przekładnia zabezpieczona jest przed przeciążeniem dwoma zaworami ciśnieniowymi. Pompa napędzana jest silnikiem asynchronicznym zwartym Sle 180 L4 o mocy znamionowej 22 kW i obrotach synchronicznych 1500 obr/min.

Mechanizm podnoszenia został zaopatrzony w układ pomiarowy, który umożliwia pomiar i rejestrację przebiegów czasowych takich wielkości, jak ciśnienie w układzie hydraulicznym, siła w linach, moment na wale dystansowym, wydajność jednostkowa pompy.

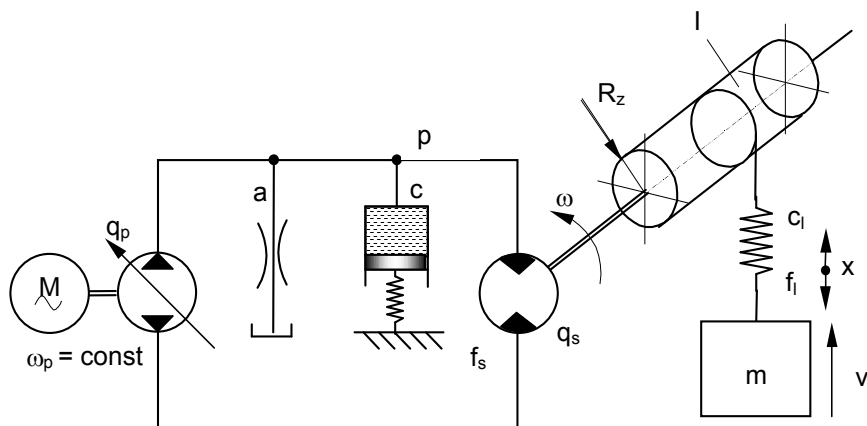
Wielkością sterującą ruchem układu jest wydajność jednostkowa pompy, która może być zmieniana sygnałem elektrycznym dzięki zastosowanemu sterownikowi elektrycznemu. Przy maksymalnym wychyleniu bloku cylindrów wydajność jednostkowa pompy osiąga wartość równą  $q_{pm} = 11,81 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{rad}$ .

#### 4.1. Model dynamiczny mechanizmu.

Model dynamiczny mechanizmu podnoszenia został opracowany w oparciu o wcześniejsze doświadczenia Zakładu MRiNH oraz autora (prace [26], [28]). Przy budowie modelu przyjęto następujące założenia oraz uwzględniono następujące cechy układu:

- parametry modelu są skupione,
- pominięto zjawiska falowe,
- pominięto wpływ pulsacji pompy i silnika hydraulicznego,
- przyjęto, że silnik elektryczny obraca się ze stałą prędkością kątową,
- strumień przecieków w układzie hydraulicznym przyjęto jako proporcjonalny do różnicy ciśnień w gałęziach obwodu,
- przyjęto stałą pojemność hydrauliczną obwodu i cieczy roboczej,
- uwzględniono podatność i tłumienie w układzie linowym,
- opory ruchu silnika hydraulicznego przyjęto jako wiskotyczne.

Schemat modelu dynamicznego układu wciągarki przedstawiono na rys. 4.3.



Rys. 4.3. Model dynamiczny układu.

W opisie matematycznym modelu wykorzystano równania ruchu elementów posiadających masy, zależności kinematyczne oraz równanie bilansu przepływu w obwodzie hydraulicznym. Opisany został przypadek rozruchu wciągarki w kierunku podnoszenia. Określone zostały następujące parametry modelu:

$$q_{pm} = 11,81 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{rad}} \text{ maksymalna wydajność jednostkowa pompy,}$$

$$a = 6,25 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}^5}{\text{N} \cdot \text{s}} \text{ - współczynnik przecieków w układzie hydraulicznym,}$$

$$c = 1,9 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}^5}{\text{N}} \text{ - pojemność hydrauliczna obwodu,}$$

$$q_s = 11,52 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{rad}} \text{ - chłonność jednostkowa silnika hydraulicznego,}$$

$$\omega_p = 154 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ - prędkość kątowa pompy,}$$

- $I = 0,21 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  - moment bezwładności elementów obrotowych mechanizmu zredukowany do wału silnika hydraulicznego,  
 $m = 1250 \text{ kg}$  - masa podnoszonego ładunku,  
 $c_l = 0,259 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  - sztywność układu linowego,  
 $f_l = 3000 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$  - współczynnik tłumienia w układzie linowym,  
 $f_s = 0,210 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$  - współczynnik tłumienia silnika hydraulicznego,  
 $\eta = 0,90$  - sprawność układu mechanicznego,  
 $R_z = 7,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  - promień zastępczy układu  
 $\left( R_z = \frac{D_b}{2 \cdot i_r} \right)$ ,  
 $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  - przyspieszenie ziemskie.

Wyróżnione zostały następujące zmienne stanu modelu:

- $p$  - różnica ciśnień na wlocie i wylocie silnika hydraulicznego,  
 $\omega$  - prędkość kątowna silnika hydraulicznego,  
 $v$  - prędkość ładunku,  
 $x$  - względne wydłużenie lin.

Wielkością sterującą jest zmienna wydajność jednostkowa pompy  $q_p$ .

Równanie bilansu przepływu w obwodzie hydraulicznym można przedstawić w postaci (4.1).

$$Q_p = Q_s + Q_a + Q_p \quad (4.1)$$

$Q_p = \omega_p \cdot q_p$  - wydajność teoretyczna pompy,

$Q_s = q_s \cdot \omega$  - chłonność teoretyczna silnika hydraulicznego,

$Q_a = a \cdot p$  - strumień przecieków,

$Q_p = c \cdot \frac{dp}{dt}$  - strumień związany z pojemnością obwodu hydraulicznego.

Równanie ruchu elementów związanych z wałem silnika hydraulicznego ma postać (4.2).

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_s - M_{obc} \quad (4.2)$$

$M_s = q_s \cdot p - f_s \cdot \omega$  - moment napędowy silnika hydraulicznego,

$$M_{obc} = S \cdot \frac{R_z}{\eta} = [c_l \cdot x + f_l \cdot (v_l - v)] \cdot \frac{R_z}{\eta} = [c_l \cdot x + f_l \cdot (R_z \cdot \omega - v)] \cdot \frac{R_z}{\eta}$$

- moment oporów ruchu,

$S = c_l \cdot x + f_l \cdot (R_z \cdot \omega - v)$  - siła w linach wciągarki,

$v_l = R_z \cdot \omega$  - prędkość lin w miejscu ich nabiegania na bęben.

Równanie ruchu podnoszonego ładunku można przedstawić w postaci (4.3).

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = S - m \cdot g \quad (4.3)$$

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = c_l \cdot x + f_l \cdot (R_z \cdot \omega - v) - m \cdot g$$

Zależność między względnym wydłużeniem lin oraz prędkościami określa związek kinematyczny (4.4).

$$\frac{dx}{dt} = v_l - v = R_z \cdot \omega - v \quad (4.4)$$

Porządkując zależności (4.1) ÷ (4.4) można uzyskać opis matematyczny układu w przestrzeni zmiennych stanu w postaci (4.5).

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{a}{c} \cdot p - \frac{q_s}{c} \cdot \omega + \frac{\omega_p}{c} \cdot q_p \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{q_s}{I} \cdot p - \left( \frac{f_s}{I} + \frac{f_l \cdot R_z^2}{I \cdot \eta} \right) \cdot \omega + \frac{f_l \cdot R_z}{I \cdot \eta} \cdot v - \frac{c_l \cdot R_z}{I \cdot \eta} \cdot x \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{f_l \cdot R_z}{m} \cdot \omega - \frac{f_l}{m} \cdot v + \frac{c_l}{m} \cdot x - g \\ \frac{dx}{dt} &= R_z \cdot \omega - v \end{aligned} \quad (4.5)$$



Rozważany mechanizm podnoszenia opisany został stacjonarnym liniowym układem równań różniczkowych IV rzędu.

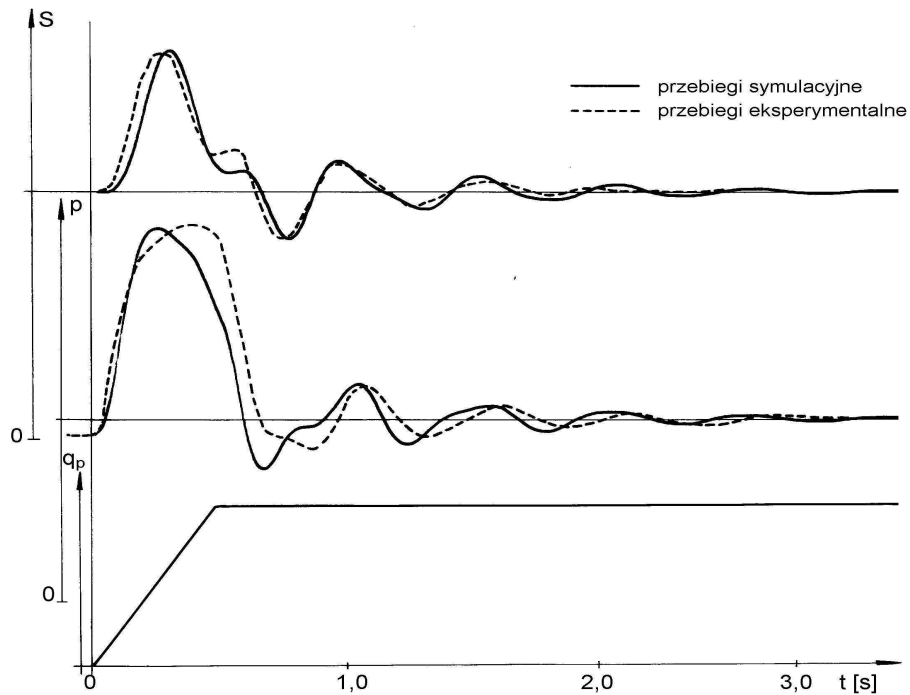
Przeprowadzony został cykl porównawczych badań eksperymentalnych i symulacyjnych potwierdzających przydatność zaproponowanej struktury i prawidłowość określenia parametrów modelu. Weryfikację przeprowadzono dla dwóch przypadków rozruchu podnoszonego ładunku:

- a) rozruchu „z powietrza” przy więziach wstępnie napiętych ciężarem podnoszonego ładunku,
- b) rozruchu „z podłoża” przy więziach nie napiętych i nie zluźzonych.

W przypadku „a” warunki początkowe równowagi zmiennych stanu i wymuszenia są niezerowe. Można je wyznaczyć przyjmując stan spoczynku układu oraz przyrównując prawe strony równań (4.5) do zera. Otrzymuje się wówczas zależności (4.6).

$$p_0 = \frac{m \cdot g \cdot R_z}{q_s \cdot \eta}, \omega_0 = 0, v_0 = 0, x_0 = \frac{m \cdot g}{c_l}, q_{p0} = \frac{m \cdot g \cdot R_z \cdot a}{q_s \cdot \omega_p \cdot \eta} \quad (4.6)$$

W okresie rozruchu, dla czasu  $t \in (0, t_r)$ , wydajność jednostkowa pompy  $q_p$  zmienia się od wartości początkowej  $q_{p0}$  do maksymalnej  $q_{pm}$ , po tym okresie, dla czasu  $t > t_r$ , wydajność jednostkowa pompy  $q_p$  jest stała i równa  $q_{pm}$ . Na rys. 4.4 porównano eksperymentalne i symulacyjne przebiegi czasowe ciśnienia  $p$  i siły w linach  $S$  dla rozruchu „z powietrza” przy liniowej zmianie funkcji sterującej  $q_p(t)$ .



Rys. 4.4. Porównanie przebiegów eksperymentalnych i teoretycznych dla rozruchu „z powietrza”.

W przypadku „b” rozruch przebiega w dwóch etapach. W etapie I ładunek stoi na podłożu, a siła w linach  $S$  jest mniejsza od ciężaru podnoszonego ładunku ( $S < m \cdot g$ ). Obowiązuje wówczas uproszczony układ równań (4.7).

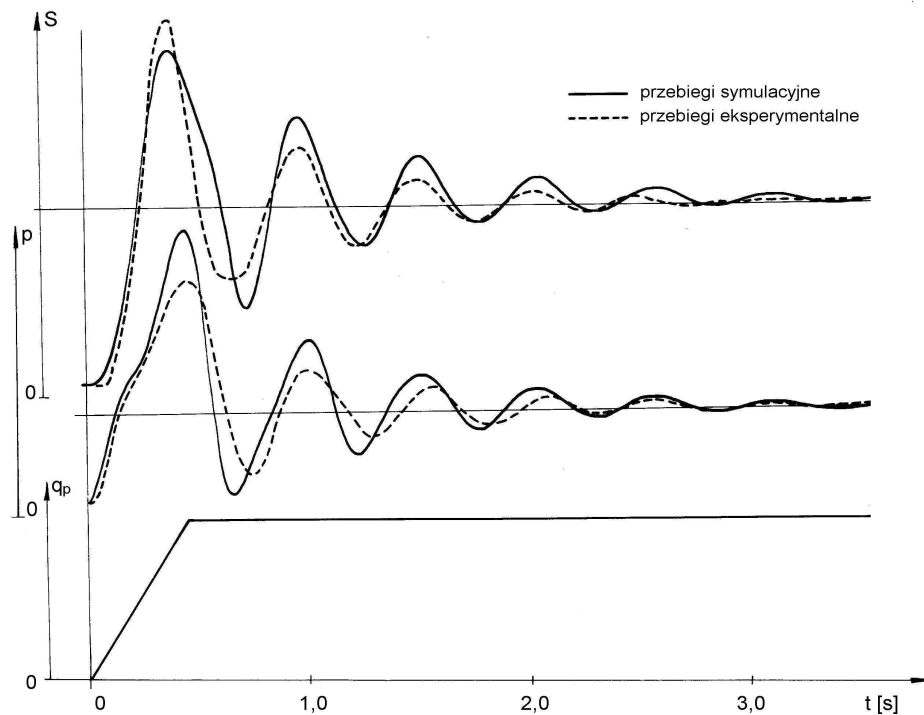
$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{a}{c} \cdot p - \frac{q_s}{c} \cdot \omega + \frac{\omega_p}{c} \cdot q_p \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{q_s}{l} \cdot p - \left( \frac{f_s}{l} + \frac{f_l \cdot R_z^2}{l \cdot \eta} \right) \cdot \omega - \frac{c_l \cdot R_z}{l \cdot \eta} \cdot x \\ \frac{dx}{dt} &= R_z \cdot \omega \\ v &= 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0 \quad - \text{ładunek stoi na podłożu} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Warunki początkowe równowagi zmiennych stanu i wymuszenia dla etapu I są zerowe.

$$p_0 = 0, \quad \omega_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad q_{p0} = 0 \quad (4.8)$$

Etap I (napinanie więzi) kończy się, gdy siła w linach  $S$  osiągnie wartość ciężaru podnoszonego ładunku. W etapie II następuje ruch ładunku i obowiązuje układ równań (4.5). Warunki końcowe etapu I są jednocześnie warunkami początkowymi etapu II.

W okresie rozruchu, dla czasu  $t \in (0, t_r)$ , wydajność jednostkowa pompy  $q_p$  zmienia się od zera do wartości maksymalnej  $q_{pm}$ , po tym okresie, dla czasu  $t > t_r$ , wydajność jednostkowa pompy  $q_p$  jest stała i równa  $q_{pm}$ . Na rys. 4.5 porównano eksperymentalne i symulacyjne przebiegi czasowe ciśnienia  $p$  i siły w linach  $S$  dla rozruchu „z podłoża” przy liniowej zmianie funkcji sterującej  $q_p(t)$ .



Rys. 4.5. Porównanie przebiegów eksperymentalnych i teoretycznych dla rozruchu „z podłoża”.

Uznano, że zaproponowany model w zadawalający sposób opisuje zachowanie dynamiczne mechanizmu podnoszenia przy rozruchu, jest również przydatny dla celów optymalizacji.

#### 4.2. Optymalizacja rozruchu „z powietrza”.

Jak wspomniano powyżej, warunki początkowe dla rozruchu „z powietrza” są niezerowe [zależności (4.6)]. Metoda optymalizacji wymaga natomiast, aby warunki początkowe równowagi zmiennych stanu i wymuszenia były równe zero. Aby to osiągnąć, dokonano zmiany układu odniesienia zmiennych stanu i wymuszenia, tak aby jego początek odpowiadał właśnie warunkom początkowym równowagi (4.6). Procedurę przesunięcia układu odniesienia opisano w rozdziale 2 zależnościami (2.7). Po dokonaniu tej operacji opis matematyczny modelu zostaje pozbawiony wolnego wyrazu  $g$  i przyjmuje postać (4.9).

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{a}{c} \cdot p - \frac{q_s}{c} \cdot \omega + \frac{\omega_p}{c} \cdot q_p \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{q_s}{l} \cdot p - \left( \frac{f_s}{l} + \frac{f_l \cdot R_z^2}{l \cdot \eta} \right) \cdot \omega + \frac{f_l \cdot R_z}{l \cdot \eta} \cdot v - \frac{c_l \cdot R_z}{l \cdot \eta} \cdot x \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{f_l \cdot R_z}{m} \cdot \omega - \frac{f_l}{m} \cdot v + \frac{c_l}{m} \cdot x \\ \frac{dx}{dt} &= R_z \cdot \omega - v \end{aligned} \quad (4.9)$$

Warunki początkowe równowagi dla zmiennych stanu i wymuszenia w nowym układzie odniesienia są zerowe.

$$p_0 = 0, \quad \omega_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad q_{p0} = 0 \quad (4.10)$$

Przyjmując maksymalną wartość sterowania  $q_{pm}$  dla nowego układu odniesienia można określić warunki równowagi układu w ruchu ustalonym, odpowiadające podnoszeniu ładunku z maksymalną prędkością.

$$\begin{aligned} q_{pu} &= q_{pm} \\ p_u &= \frac{\omega_p \cdot q_{pm} \cdot f_s}{a \cdot f_s + q_s^2}, \quad \omega_u = \frac{\omega_p \cdot q_{pm} \cdot q_s}{a \cdot f_s + q_s^2}, \quad v_u = \frac{R_z \cdot \omega_p \cdot q_{pm} \cdot q_s}{a \cdot f_s + q_s^2}, \quad x_u = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Poszukuje się takiego przebiegu funkcji sterującej  $q_p(t)$  w okresie rozruchu dla czasu  $t \in (0, t_r)$ , aby maksymalne wartości ciśnienia  $p$  w układzie były jak najmniejsze. Wobec tego do rozważań optymalizacyjnych przyjęty został wskaźnik jakości drugiego typu o strukturze (3.27). W rozważanym przypadku w odniesieniu do ciśnienia przyjmuje on postać (4.12).

$$I [ q_p(t) ] = \int_0^{t_k} (p - p_u)^2 \cdot dt \quad (4.12)$$

Po dyskretyzacji wskaźnik (4.12) przyjmie postać (4.13).

$$I ( q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr} ) = \sum_{i=1}^{i=k} (p_i - p_u)^2 \quad (4.13)$$

Czas  $t_k$ , w którym obliczany jest wskaźnik jakości, został dobrany jako znacznie większy od czasu rozruchu  $t_r$  ( $t_k > t_r$ ). W ujęciu dyskretnym odpowiada to sytuacji, kiedy ilość kroków całkowania  $k$ , odpowiadająca czasowi obliczania wskaźnika jakości, jest większa od ilości kroków całkowania  $r$ , odpowiadających rozruchowi ( $k > r$ ).

Na ciąg impulsów sterujących  $\{q_{pi}\} = \{q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr}\}$  lub współrzędne punktu  $\mathbf{U}(q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr})$  w przestrzeni  $r$ -wymiarowej nałożone zostały ograniczenia typu (3.20) i (3.21), które w omawianym przypadku przyjmują postać (4.14).

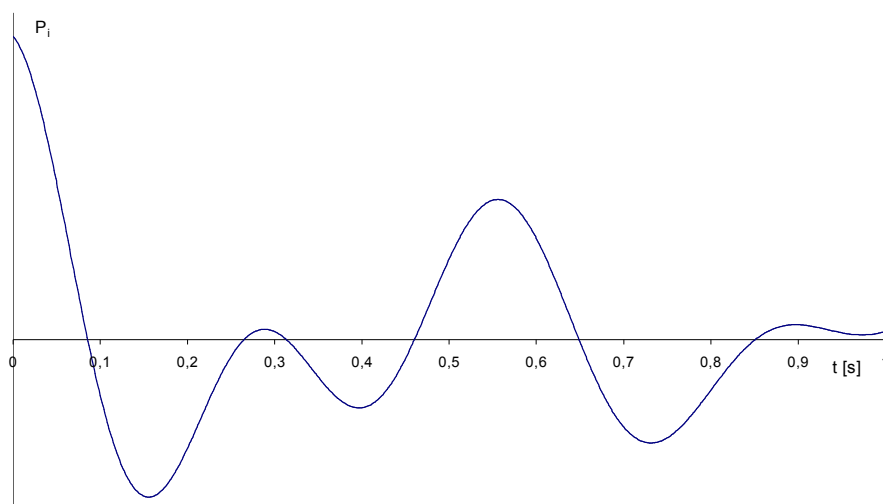
$$\begin{aligned} 0 \leq q_{pi} \leq q_{pm} & \quad i = 1, 2, \dots, r \\ |q_{p(j+1)} - q_{pj}| \leq a & \quad j = 1, 2, \dots, r-1 \\ q_{p1} \leq a \wedge q_{pm} - q_{pr} \leq a & \quad a > 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Zadanie optymalizacji sformułowane zostało w następujący sposób: należy znaleźć taki punkt  $\hat{\mathbf{U}}(\hat{q}_{p1}, \hat{q}_{p2}, \dots, \hat{q}_{pr})$  w  $r$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych, który należąc do obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  danego równaniami (4.14) minimalizuje wskaźnik jakości (4.13).

Do rozwiązania zadania zastosowano procedurę opisaną w rozdziale 3.3.

Wyznaczono odpowiedź dynamiczną układu na pojedynczy impuls sterujący o podstawie  $\Delta t$  i wysokości 1 działający w czasie  $t \in (0, \Delta t)$  przy zerowych warunkach początkowych. Otrzymano w ten sposób przebieg czasowy ciśnienia w obwodzie hydraulicznym, stanowiący ciąg wartości

$\{P_i\} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ , którego elementy zapisano w tablicy w pamięci komputera. Pokazano go na rys. 4.6.



Rys. 4.6. Odpowiedź dynamiczna układu na jednostkowy impuls sterujący  $\Delta t \cdot 1$ .

Wskaźnik jakości sterowania (4.13) uzależniony został od ciągu impulsów wymuszających  $\{q_{pj}\} = \{q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr}\}$ .

$$p_i = \sum_{j=1}^{j=i} P_{i-j+1} \cdot q_{pj} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$I(q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr}) = \sum_{i=1}^{i=k} (p_i - p_u)^2 = \sum_{i=1}^{i=k} \left( \sum_{j=1}^{j=i} P_{i-j+1} \cdot q_{pj} - p_u \right)^2 \quad (4.15)$$

Ciąg wartości ciśnień  $\{p_i\} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  występujący w zależności (4.15) stanowi odpowiedź dynamiczną układu na sterowanie dane ciągiem  $\{q_{pj}\} = \{q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr}\}$ .

Należy pamiętać, że po zakończeniu rozruchu (dla  $j > r$ ) ciąg impulsów sterujących jest stały ( $\{q_{pj}\} = \{q_{p(r+1)}, q_{p(r+2)}, \dots, q_{pk}\} = \{q_{pm} = \text{const}\}$ ).

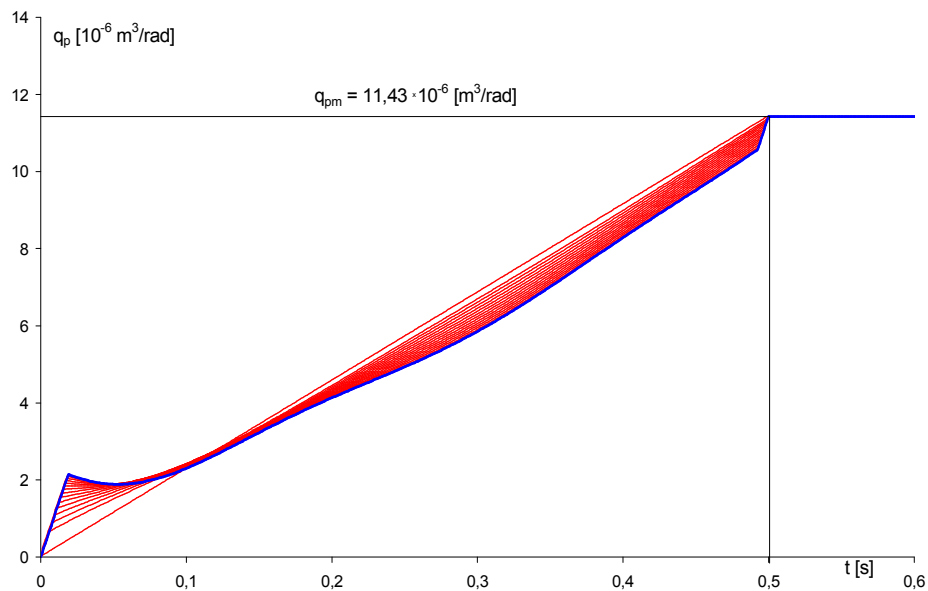
Określone zostały składowe gradientu wskaźnika jakości  $I$  względem zmiennych  $q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr}$ . Opisują je zależności (4.16).

$$\frac{\partial l}{\partial q_{pi}} = 2 \cdot \sum_{j=i}^{j=k} P_{j-i+1} \cdot (p_j - p_u) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$p_j = \sum_{l=1}^{l=j} P_{j-l+1} \cdot q_{pl} \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial l}{\partial q_{pi}} = 2 \cdot \sum_{j=i}^{j=k} P_{j-i+1} \cdot \left( \sum_{l=1}^{l=j} P_{j-l+1} \cdot q_{pl} - p_u \right)$$

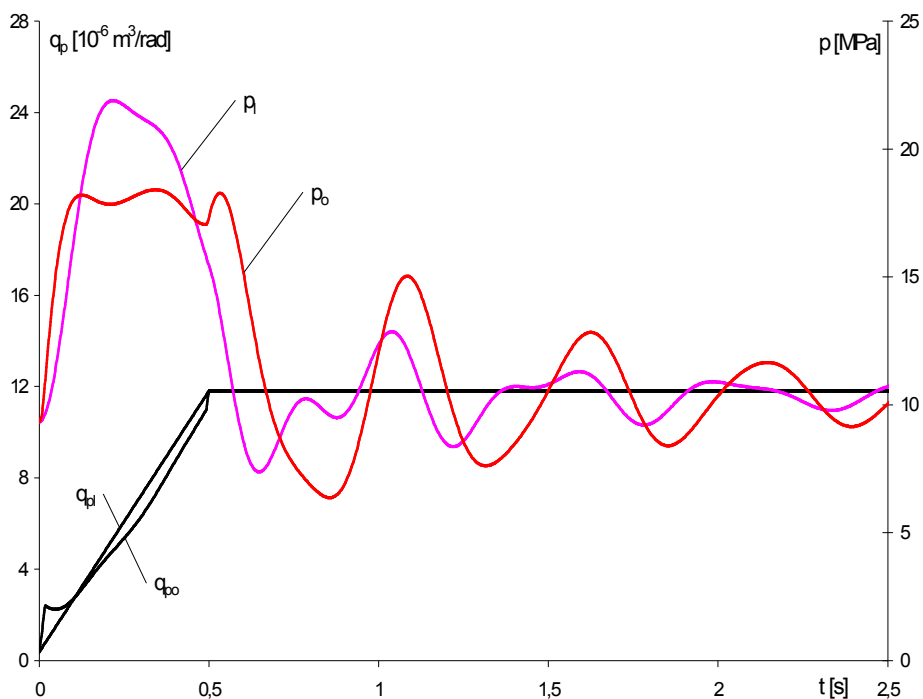
Współrzędne punktu początkowego  $\mathbf{U}(q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr})$  przyjęto tak, aby odpowiadały liniowemu przebiegowi funkcji sterującej w czasie rozruchu.



Rys. 4.7. Kolejne przybliżenia optymalnej funkcji sterującej.

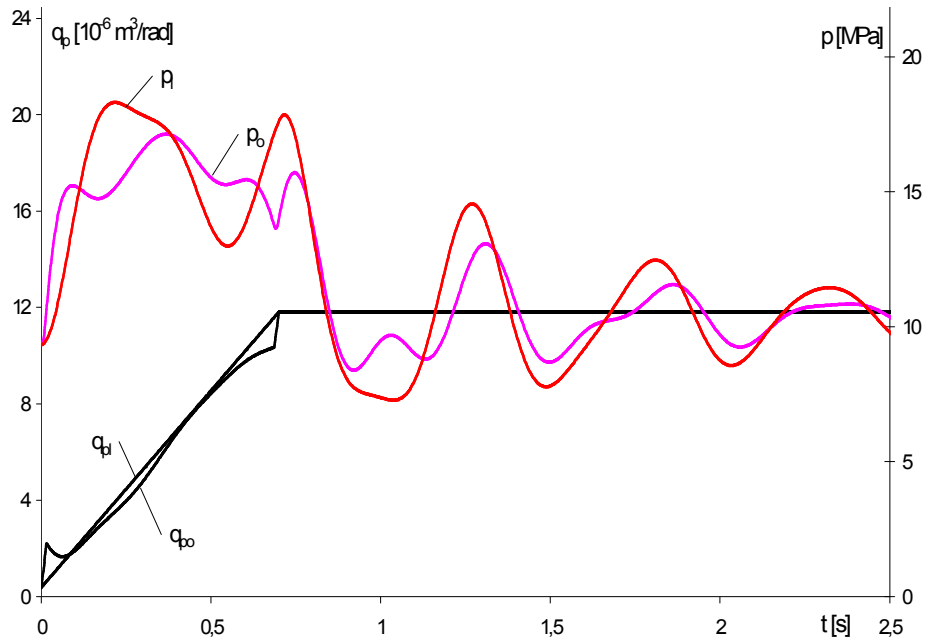
Na rys. 4.7 pokazano działanie metody optymalizacji. W kolejnych etapach przy zastosowaniu metody rzutu wektora największego spadku na granicę obszaru rozwiązań dopuszczalnych określana jest coraz lepsza funkcja sterująca - od liniowej do optymalnej.

Przykładowe wyniki optymalizacji pokazano na rysunkach 4.8 i 4.9 dla czasów rozruchu odpowiednio  $t_r = 0,5$  s oraz  $t_r = 0,7$  s. Zamieszczono na nich przebiegi sterowań wg funkcji liniowej (indeks „l”) oraz optymalnych (indeks „o”), jak również odpowiadające im przebiegi ciśnienia w obwodzie hydraulicznym.



Rys. 4.8. Rozruch „z powietrza”. Sterowanie liniowe i optymalne,  $t_r = 0,5$  s.





Rys. 4.9. Rozruch „z powietrza”. Sterowanie liniowe i optymalne,  $t_r = 0,7$  s.

#### 4.3. Optymalizacja rozruchu „z podłoża”.

Rozruch „z podłoża” przebiega w dwóch etapach. Jak już wspomniano, w etapie I napinane są więzi, a ładunek spoczywa na podłożu. W etapie II siła w linach staje się większa od ciężaru ładunku i następuje jego ruch do góry. Przyjęto, że w etapie I funkcja sterująca jest liniowa, natomiast optymalizacji poddano funkcję sterującą w etapie II.

Identycznie, jak w podrozdziale 4.2, dokonano zmiany układu odniesienia zmiennych stanu i wymuszenia, tak aby jego początek odpowiadał warunkom początkowym równowagi (4.6) dla podnoszenia „z powietrza”.

W etapie I (napinanie więzi) w nowym układzie odniesienia opis matematyczny układu ma niezmienną postać (4.7), natomiast warunki początkowe są inne. Określają je zależności (4.17).

$$p_0 = -\frac{m \cdot g \cdot R_z}{q_s \cdot \eta}, \omega_0 = 0, v_0 = 0, x_0 = -\frac{m \cdot g}{c_l}, q_{p0} = -\frac{m \cdot g \cdot R_z \cdot a}{q_s \cdot \omega_p} \quad (4.17)$$

Inny jest również warunek końca I etapu w nowym układzie odniesienia, zmienił się bowiem także układ odniesienia siły w linach. Etap I trwa do momentu, kiedy spełniony jest warunek (4.18).

$$S = c_l \cdot x + f_l \cdot R_z \cdot \omega \leq 0 \quad (4.18)$$

Sterowanie w etapie I odpowiada liniowej zmianie wymuszenia  $q_p$  od wartości  $q_{p0}$ , przy czym pochylenie prostej posiada wartość  $\text{tg } \alpha = \frac{q_{pm} - q_{p0}}{t_r}$ . Wielkości  $q_{p0}$  i  $q_{pm}$  mierzone są w nowym układzie odniesienia.

Wykorzystując opis matematyczny (4.7), warunki początkowe (4.17) oraz sterowanie wg funkcji liniowej, określono przebiegi dynamiczne zmiennych stanu, przy czym dokładnie na koniec etapu I (w momencie, kiedy po raz pierwszy przestaje być spełniony warunek (4.18)) zapamiętane zostały w pamięci komputera wartości czasu  $t_p$ , zmiennych stanu  $p_p$ ,  $\omega_p$ ,  $v_p$ ,  $x_p$  i wymuszenia  $q_{pp}$ . Stanowią one warunki początkowe dla II etapu ruchu (podnoszenie ładunku) w nowym układzie odniesienia.

Warunki równowagi układu w ruchu ustalonym, odpowiadające podnoszeniu ładunku z maksymalną prędkością określają zależności (4.11).

Poszukuje się takiego przebiegu funkcji sterującej  $q_p(t)$  w okresie rozruchu dla czasu  $t \in (t_p, t_r)$ , aby maksymalne wartości ciśnienia  $p$  w układzie były jak najmniejsze. Przyjęto wskaźnik jakości typu (4.12), który dla rozruchu „z podłoża” przyjmuje postać (4.19).

$$I [q_p(t)] = \int_{t_p}^{t_k} (p - p_u)^2 \cdot dt \quad (4.19)$$

Po dyskretyzacji oraz uwzględnieniu faktu, że czasowi  $t_p$  odpowiada liczba  $p$  kroków całkowania, wskaźnik (4.19) przyjmie postać (4.20).

$$I(q_{p(p+1)}, q_{p(p+2)}, \dots, q_{pr}) = \sum_{i=p+1}^{i=k} (p_i - p_u)^2 \quad (4.20)$$

Podobnie, jak przy podnoszeniu „z powietrza”, czas  $t_k$ , w którym obliczany jest wskaźnik jakości, został dobrany jako znacznie większy od czasu rozruchu  $t_r$  ( $t_k > t_r$ ). W ujęciu dyskretnym odpowiada to sytuacji, kiedy ilość kroków całkowania  $k$ , odpowiadająca czasowi obliczania wskaźnika jakości, jest większa od ilości kroków całkowania  $r$ , odpowiadających rozruchowi ( $k > r$ ).

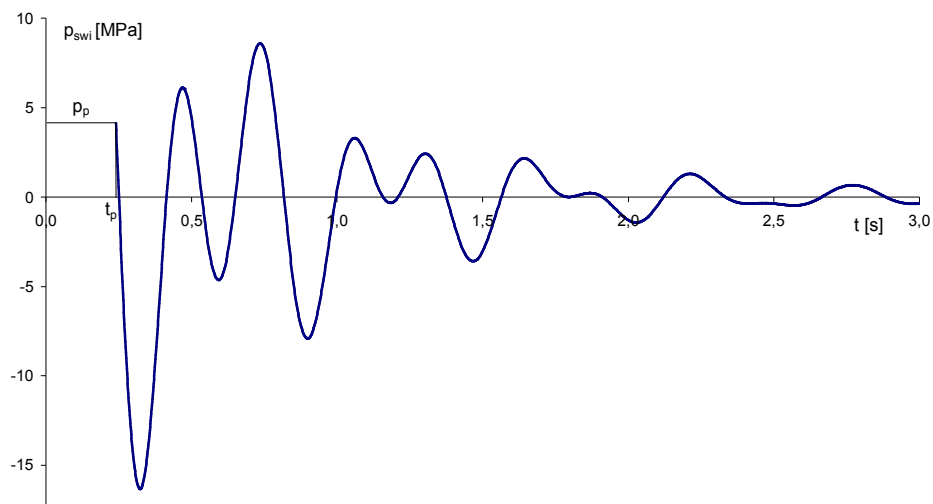
Na ciąg impulsów sterujących  $\{q_{pi}\} = \{q_{p(p+1)}, q_{p(p+2)}, \dots, q_{pr}\}$  lub współrzędne punktu  $\mathbf{U}(q_{p(p+1)}, q_{p(p+2)}, \dots, q_{pr})$  w przestrzeni  $r$ -wymiarowej nałożone zostały ograniczenia typu (3.20) i (3.21), które w omawianym przypadku przyjmują postać (4.21).

$$\begin{aligned} 0 \leq q_{pi} &\leq q_{pm} & i &= p+1, p+2, \dots, r \\ |q_{p(j+1)} - q_{pj}| &\leq a & j &= p+1, p+2, \dots, r-1 \\ |q_{p(p+1)} - q_{pp}| &\leq a \wedge q_{pm} - q_{pr} \leq a & a &> 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Zadanie optymalizacji sformułowane zostało w następujący sposób: należy znaleźć taki punkt  $\hat{\mathbf{U}}(\hat{q}_{p(p+1)}, \hat{q}_{p(p+2)}, \dots, \hat{q}_{pr})$  w  $(r-p)$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych, który należąc do obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  danego równaniami (4.21) minimalizuje wskaźnik jakości (4.20).

Do rozwiązania zadania zastosowano procedurę opisaną w rozdziale 3.3.

Wyznaczono odpowiedź swobodną układu przy warunkach początkowych odpowiadających chwili  $t = t_p$  ( $i = p$ ) i przy sterowaniu równym zero. Otrzymano w ten sposób przebieg czasowy ciśnienia w obwodzie hydraulicznym stanowiący ciąg wartości  $\{p_{swi}\} = \{p_{sw(p+1)}, p_{sw(p+2)}, \dots, p_{swk}\}$ , którego elementy zapisano w tablicy w pamięci komputera. Pokazano go na rys. 4.10.



Rys. 4.10. Odpowiedź swobodna układu przy warunkach początkowych odpowiadających chwili końca etapu I ( $t = t_p$ ).

W pamięci komputera zapisano również ciąg wartości  $\{P_i\} = \{P_{p+1}, P_{p+2}, \dots, P_k\}$ , będący odpowiedzią dynamiczną układu na pojedynczy impuls sterujący o podstawie  $\Delta t$  i wysokości 1 działający w czasie  $t \in ((t_p, t_p + \Delta t))$  przy zerowych warunkach początkowych.

Zgodnie z zależnością (3.16) wartość zmiennej stanu w dowolnej chwili  $t_i$  jest sumą odpowiedzi swobodnej oraz wymuszonej, stanowiącej odpowiedź na ciąg sterowań  $\{q_{pj}\} = \{q_{p(p+1)}, q_{p(p+2)}, \dots, q_{pr}\}$ . Po zakończeniu rozruchu (dla  $j > r$ ) ciąg impulsów sterujących jest stały ( $\{q_{pj}\} = \{q_{p(r+1)}, q_{p(r+2)}, \dots, q_{pk}\} = \{q_{pm} = \text{const}\}$ ). Dla ciśnienia w odwodzie hydraulicznym zależność przyjmuje postać (4.22).

$$p_i = p_{swi} + \sum_{j=p+1}^{j=i} P_{i-j+p+1} \cdot q_{pj} \quad i = p + 1, p + 2, \dots, k \quad (4.22)$$

Po uzależnieniu wskaźnika jakości (4.20) od ciągu impulsów wymuszających otrzymuje się zależność (4.23).

$$\begin{aligned}
 I(q_{p(p+1)}, q_{p(p+2)}, \dots, q_{pr}) &= \sum_{i=p+1}^{i=k} (p_i - p_u)^2 = \\
 &= \sum_{i=p+1}^{i=k} \left( p_{swi} + \sum_{j=p+1}^{j=i} P_{i-j+1} \cdot q_{pj} - p_u \right)^2 \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

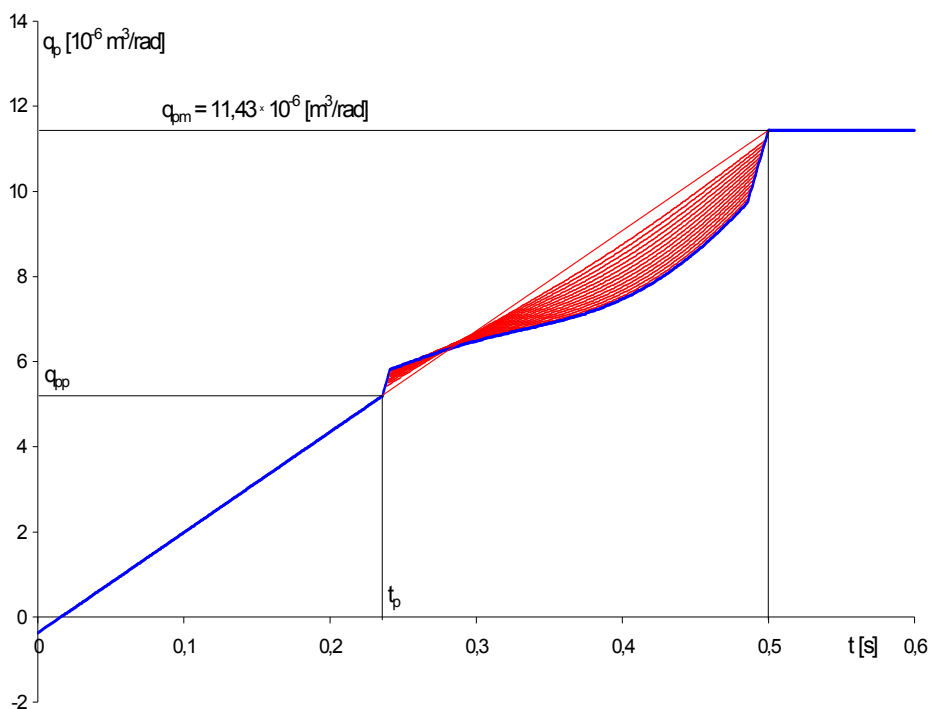
Określone zostały składowe gradientu wskaźnika jakości  $I$  względem zmiennych  $q_{p(p+1)}, q_{p(p+2)}, \dots, q_{pr}$ . Opisują je zależności (4.24).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I}{\partial q_{pi}} &= 2 \cdot \sum_{j=i}^{j=k} P_{j-i+1} \cdot (p_j - p_u) \quad i = p+1, p+2, \dots, r \\
 p_j &= p_{swj} + \sum_{l=p+1}^{l=j} P_{j-l+1} \cdot q_{pl} \quad j = p+1, p+2, \dots, k \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I}{\partial q_{pi}} = 2 \cdot \sum_{j=i}^{j=k} P_{j-i+1} \cdot \left( p_{swj} + \sum_{l=p+1}^{l=j} P_{j-l+1} \cdot q_{pl} - p_u \right)$$

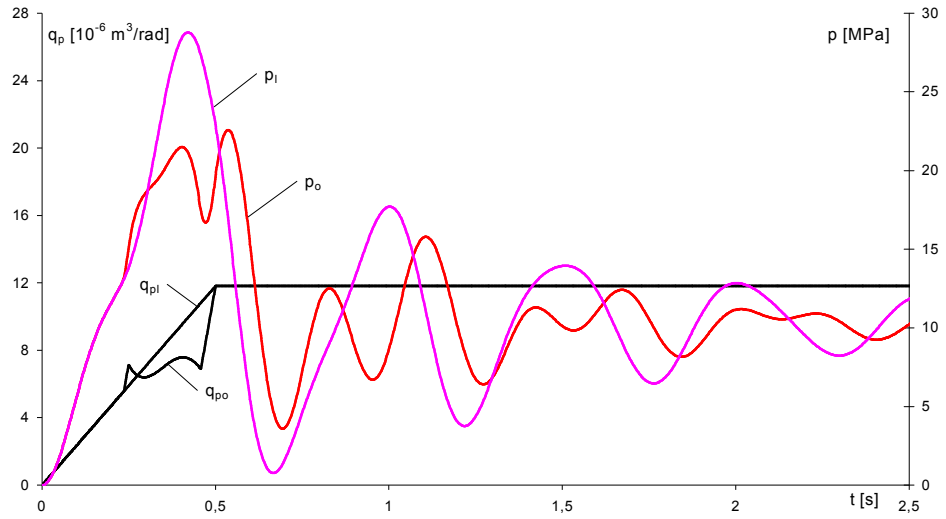
Współrzędne punktu początkowego  $\mathbf{U}(q_{p(p+1)}, q_{p(p+2)}, \dots, q_{pr})$  przyjęto tak, aby odpowiadały liniowemu przebiegowi funkcji sterującej w czasie rozruchu od wartości  $q_{pp}$  do  $q_{pm}$  w czasie  $t \in (t_p, t_r)$ .

Na rys. 4.11 pokazano działanie metody optymalizacji. W kolejnych etapach przy zastosowaniu metody rzutu wektora największego spadku na granicę obszaru rozwiązań dopuszczalnych określana jest coraz lepsza funkcja sterująca - od liniowej do optymalnej. Jak widać, optymalizacja dotyczy tylko II etapu ruchu, w etapie I funkcja sterująca pozostaje liniowa.

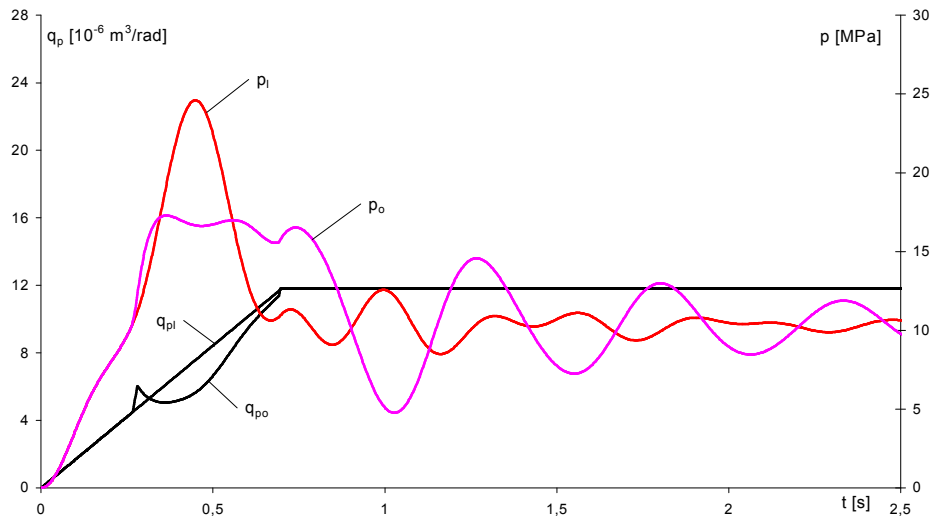


Rys. 4.11. Kolejne przybliżenia optymalnej funkcji sterującej.

Przykładowe wyniki optymalizacji pokazano na rysunkach 4.12 i 4.13 dla czasów rozruchu odpowiednio  $t_r = 0,5$  s oraz  $t_r = 0,7$  s. Zamieszczono na nich przebiegi sterowań wg funkcji liniowej (indeks „l”) oraz optymalnych (indeks „o”), jak również odpowiadające im przebiegi ciśnienia w obwodzie hydraulicznym.



Rys. 4.12. Rozruch „z podłoża”. Sterowanie liniowe i optymalne,  $t_r = 0,5$  s.



Rys. 4.13. Rozruch „z podłoża”. Sterowanie liniowe i optymalne,  $t_r = 0,7$  s.

#### **4.4. Podsumowanie.**

Przeprowadzone badania optymalizacyjne, których przykładowe wyniki przedstawiono powyżej, potwierdziły działanie metody optymalizacji. Umożliwia ona znalezienie sterowania optymalnego, zmniejszającego przyjęty wskaźnik jakości drugiego typu przy znanym obszarze sterowań dopuszczalnych. To z kolei prowadzi do obniżenia maksymalnych wartości ciśnienia w obwodzie hydraulicznym o około 20 % w stosunku do sterowania wg funkcji liniowej.

Efekt optymalizacji rośnie wraz ze zmniejszaniem czasu rozruchu. W mechanizmach podnoszenia jest on stosunkowo krótki i zastosowanie sterowania optymalnego umożliwia zmniejszenie maksymalnych obciążeń bez jego wydłużania i tym samym bez zmniejszania wydajności maszyny.

Przy zastosowaniu współczesnych komputerów czas wyznaczania sterowań optymalnych jest stosunkowo krótki (około kilka sekund). Przy bardziej ostrych wymaganiach czasowych optymalne funkcje sterujące mogą zostać wyznaczone wcześniej dla powtarzalnych warunków rozruchu i zmagazynowane w postaci tablic w pamięci komputera. Wówczas funkcja optymalna pobierana jest z pamięci i wydawana do sterownika wydajności pompy w czasie rzeczywistym.

Praktyczne wykorzystanie sterowań optymalnych w rzeczywistych układach mechanizmów podnoszenia wymaga możliwości ciągłego sterowania prędkością oraz istnienia szybkiego układu sterowania. Duża liczba współcześnie produkowanych systemów hydrostatycznych spełnia te wymagania.



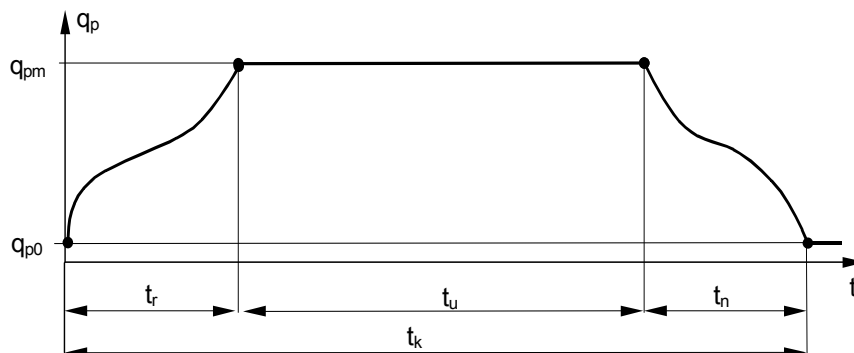
## 5. OPTIMALIZACJA RUCHU ROBOCZEGO MECHANIZMU JAZDY MOSTU SUWNICY Z NAPĘDEM HYDROSTATYCZNYM.

Mechanizmy jazdy suwnic są szczególnie podatne na optymalizację z uwagi na wiotko podwieszony na linach ładunek oraz konieczność wytlumienia jego wahań w kierunku ruchu maszyny. Zastosowanie sterowania optymalnego umożliwiającego wytlumienia wahań ładunku po okresach rozruchu i hamowania polepsza cechy eksploatacyjne i, jak to zostanie wykazane w dalszej części rozdziału, również cechy energetyczne ruchu roboczego.

Badaniom optymalizacyjnym poddano hydrostatyczny mechanizm jazdy mostu suwnicy o udźwigu  $Q = 500$  kN, rozpiętości  $L = 14$  m i prędkości jazdy mostu  $v_{jm} = 103$  m/min.

W badanej suwnicy centralny elektromechaniczny mechanizm jazdy zastąpiono odpowiednio dobranym mechanizmem elektrohydrostatycznym. Zawiera on pierwotny silnik asynchroniczny zwarty, który napędza pompę o zmiennej wydajności jednostkowej. Pompa pracuje w obiegu zamkniętym z silnikiem hydrostatycznym wolnobieżnym o stałej chłonności, który poprzez wolnobieżny wał transmisyjny związany jest bezpośrednio z kołami jezdnyimi obu czołownic. Dzięki zmiennej wydajności jednostkowej pompy istnieje możliwość ciągłego sterowania prędkością czołownic, a sama przekładnia hydrostatyczna umożliwia przepływ energii w dwóch kierunkach, co pozwala na jej dostarczanie i odzyskiwanie od układu.

Badaniu poddano ruch roboczy mechanizmu, składający się z trzech etapów: rozruchu, ruchu ustalonego i hamowania, co odpowiada przebiegowi wydajności jednostkowej pompy pokazanemu na rys. 5.1.



Rys. 5.1. Przebieg wydajności jednostkowej pompy w ruchu roboczym.

Minimalizacji poddana jest energia wewnętrzna układu, a poszukiwane są optymalne przebiegi funkcji sterującej w okresach rozruchu i hamowania. Parametry badanej suwnicy zostały celowo tak dobrane, aby energia wewnętrzna zmagazynowana w wahającym się ładunku była znaczna większa od energii wewnętrznej zmagazynowanej w innych elementach układu, stąd masa podnoszonego ładunku jest duża w stosunku do masy mostu i wózka (przyjęto do badań suwnicę o małej rozpiętości).

### 5.1. Model dynamiczny mechanizmu.

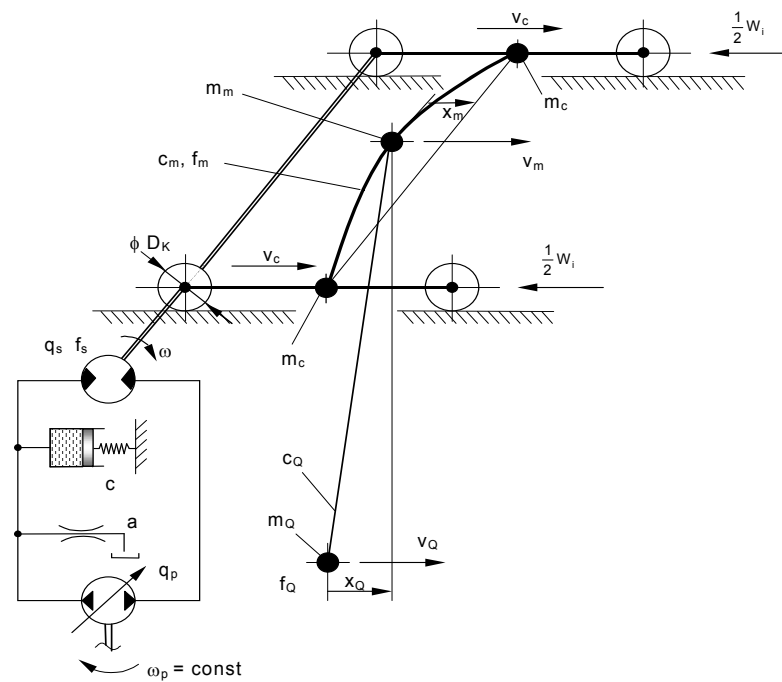
Model dynamiczny mechanizmu został opracowany w oparciu o wcześniejsze doświadczenia Zakładu MRiNH (prace [25], [55]). Przy określaniu parametrów modelu wzięto pod uwagę dane katalogowe elementów oraz dokumentację techniczną suwnicy.

Przy budowie modelu przyjęto następujące założenia i uwzględniono następujące cechy układu:

- układ jest symetryczny, tzn. wózek z wciągarką jest posadowiony w środku mostu,
- prędkości obydwu czołownic są takie same,
- zewnętrzne opory ruchu mostu suwnicy są stałe i rozkładają się jednakowo na obie czołownice,
- parametry modelu są skupione,
- elementy mechanizmu połączone są więziami lepko-sprężystymi,

- tłumienie ma charakter wiskotyczny,
- wahania zawieszonoego na linach ładunku są małe ( $\sin \varphi \cong \varphi$ ),
- liny wciągarki są nieważkie i mają stałą długość,
- ładunek potraktowany został jako punkt materialny,
- siła oporu powietrza działająca na ładunek jest proporcjonalna do jego prędkości,
- pominięto zjawiska falowe,
- pominięto wpływ pulsacji pompy i silnika hydraulicznego,
- przyjęto, że silnik elektryczny obraca się ze stałą prędkością kątową,
- strumień przecieków w układzie hydraulicznym przyjęto jako proporcjonalny do różnicy ciśnień w gałęziach obwodu,
- przyjęto stałą pojemność hydrauliczną obwodu i cieczy roboczej,
- przyjęto wiskotyczne opory ruchu silnika hydraulicznego.

Schemat modelu mechanizmu przedstawiono na rys. 5.2.



Rys. 5.2. Model dynamiczny mechanizmu.

W opisie matematycznym modelu wykorzystano równania ruchu elementów posiadających masy, zależności kinematyczne oraz równanie bilansu przepływu w obwodzie hydraulicznym. Opisany został przypadek ruchu roboczego mechanizmu, w wyniku którego most suwnicy przemieszcza się o zadaną wielkość  $s_z$ . Określone zostały następujące parametry modelu:

$$q_{pm} = 22,22 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{rad}} - \text{maksymalna wydajność jednostkowa pompy,}$$

$$a = 35,8 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}^5}{\text{N} \cdot \text{s}} - \text{współczynnik przecieków w układzie hydraulicznym,}$$

$$c = 2 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}^5}{\text{N}} - \text{pojemność hydrauliczna obwodu,}$$

$$q_s = 1273 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{rad}} - \text{chłonność jednostkowa silnika hydraulicznego,}$$

$$\omega_p = 157 \frac{\text{rad}}{\text{s}} - \text{prędkość kątowna pompy,}$$

$$m_Q = 51050 \text{ kg} - \text{masa podnoszonego ładunku,}$$

$$m_m = 32280 \text{ kg} - \text{suma zredukowanej masy mostu suwnicy i wózka,}$$

$$m_c = 6330 \text{ kg} - \text{zredukowana masa jednej czołownicy,}$$

$$W_j = 9190 \text{ N} - \text{zewnątrzne opory ruchu mostu suwnicy,}$$

$$c_Q = 25040 \frac{\text{N}}{\text{m}} - \text{sztwność pozioma zawieszenia ładunku,}$$

$$c_m = 26,4 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} - \text{sztwność pozioma mostu,}$$

$$f_Q = 15,6 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} - \text{współczynnik oporu powietrza ładunku,}$$

$$f_m = 44\,070 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \quad - \text{współczynnik tłumienia mostu suwnicy,}$$

$$f_s = 120,3 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}} \quad - \text{współczynnik tłumienia silnika hydraulicznego,}$$

$$D_k = 0,9 \text{ m} \quad - \text{średnica koła jezdnego.}$$

Wyróżnione zostały następujące zmienne stanu modelu:

$p$  - różnica ciśnień na wlocie i wylocie silnika hydraulicznego,

$v_c$  - prędkość czołownicy,

$v_m$  - prędkość środka mostu,

$v_Q$  - prędkość ładunku w kierunku ruchu mostu,

$x_m$  - przemieszczenie poziome czołownic względem środka mostu,

$x_Q$  - przemieszczenie poziome środka mostu względem ładunku.

Wielkością sterującą jest zmienna wydajność jednostkowa pompy  $q_p$ .

Równanie bilansu przepływu w obwodzie hydraulicznym można przedstawić w postaci (5.1).

$$Q_p = Q_s + Q_a + Q_p \quad (5.1)$$

$Q_p = \omega_p \cdot q_p$  - wydajność teoretyczna pompy,

$Q_s = q_s \cdot \omega = \frac{2 \cdot q_s \cdot v_c}{D_k}$  - chłonność teoretyczna silnika hydraulicznego,

$\omega = \frac{2 \cdot v_c}{D_k}$  - prędkość kątowa koła jezdnego,

$Q_a = a \cdot p$  - strumień przecieków,

$Q_p = c \cdot \frac{dp}{dt}$  - strumień związany z pojemnością hydrauliczną obwodu.

Równanie ruchu czołownic ma postać (5.2).

$$2 \cdot m_c \cdot \frac{dv_c}{dt} = \frac{2 \cdot M_s}{D_k} - S - W_j \quad (5.2)$$

$$2 \cdot m_c \cdot \frac{dv_c}{dt} = \frac{2 \cdot q_s}{D_k} \cdot p - \frac{4 \cdot f_s}{D_k^2} \cdot v_c - c_m \cdot x_m - f_m \cdot (v_c - v_m) - W_j$$

$$M_s = q_s \cdot p - f_s \cdot \omega = q_s \cdot p - \frac{2 \cdot f_s \cdot v_c}{D_k} \quad \text{- moment napędowy silnika}$$

hydraulicznego,

$$S = c_m \cdot x_m + f_m \cdot (v_c - v_m) \quad \text{- siła oddziaływania między mostem i czołownicami.}$$

Równanie ruchu mostu ma postać (5.3).

$$m_m \cdot \frac{dv_m}{dt} = S - H \quad (5.3)$$

H - składowa pozioma siły w linach, na których zawieszony jest ładunek.

Jak już wspomniano, zawieszony na linach ładunek potraktowany został jako wahadło matematyczne w ruchu płaskim, w którym punkt zawieszenia M porusza się ze znaną prędkością poziomą  $v_m$  oraz znanym przyśpieszeniem poziomym  $\frac{dv_m}{dt}$ . Sytuację pokazano na rys. 5.3.

Punkt materialny Q o masie  $m_Q$  zawieszony jest na nieważkim i nierozciągliwym cięgnię o długości  $L_s = 20$  m. Załóżmy ponadto, że w dowolnej chwili znana jest prędkość kątowa  $\omega$  i wychylenie kątowe  $\varphi$  wahadła, związane z odchyleniem poziomym ładunku od położenia pionowego  $x_Q$ .

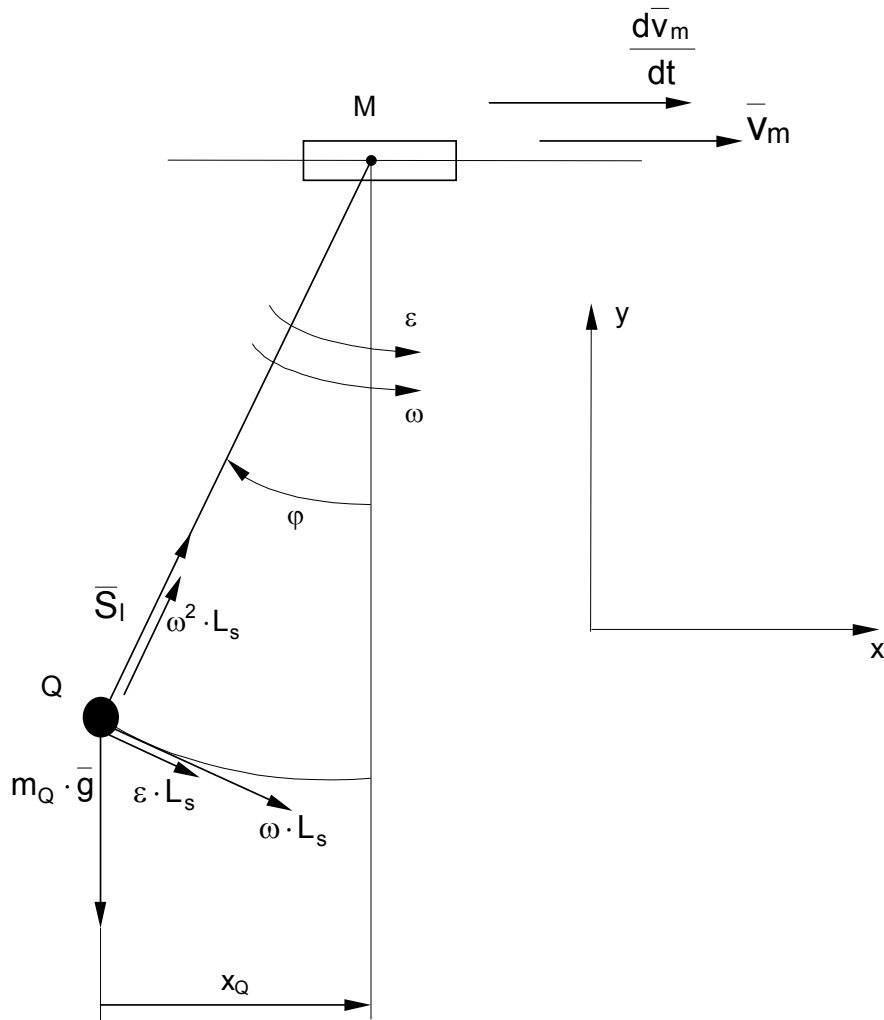
Równanie ruchu punktu materialnego Q ma postać (5.4).

$$m_Q \cdot \frac{d\bar{v}_Q}{dt} = \bar{S}_l + m_Q \cdot \bar{g} \quad (5.4)$$

$S_l$  - siła w cięgnię, na którym wisi ładunek,

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$  - przyśpieszenie ziemskie.

Przyśpieszenie całkowite punktu Q można przedstawić jako sumę wektorową przyśpieszenia punktu M oraz przyśpieszenia względnego punktu Q względem M, posiadającą składową styczną (indeks „t”) i normalną (indeks „n”).



Rys. 5.3. Model zawieszonoego na linach ładunku.

$$\frac{d\bar{v}_Q}{dt} = \frac{d\bar{v}_m}{dt} + \bar{p}_{QM}^t + \bar{p}_{QM}^n \quad (5.5)$$

$$p_{QM}^t = \varepsilon \cdot L_s \quad p_{QM}^n = \omega^2 \cdot L_s$$

Rzutuując równanie wektorowe (5.4) na osie poziomą  $x$  i pionową  $y$  po wykorzystaniu zależności (5.5) otrzymuje się układ równań skalarnych (5.6).

$$m_Q \cdot \left( \frac{dv_m}{dt} + \varepsilon \cdot L_s \cdot \cos \varphi + \omega^2 \cdot L_s \cdot \sin \varphi \right) = S_l \cdot \sin \varphi \quad (5.6)$$

$$m_Q \cdot \left( -\varepsilon \cdot L_s \cdot \sin \varphi + \omega^2 \cdot L_s \cdot \cos \varphi \right) = S_l \cdot \cos \varphi - m_Q \cdot g$$

Niewiadomymi w powyższym układzie są siła  $S_l$  oraz przyśpieszenie kątowe wahadła  $\varepsilon$ . Rozwiązując układ względem siły  $S_l$  otrzymuje się zależność (5.7).

$$S_l = m_Q \cdot \left( \frac{dv_m}{dt} \cdot \sin \varphi + g \cdot \cos \varphi + \omega^2 \cdot L_s \right) \quad (5.7)$$

Zakładając kąty  $\varphi$  mniejsze od 0,1 radiana można przyjąć za słuszne poniższe zależności.

$$\varphi [\text{rad}] \cong \sin \varphi = \frac{x_Q}{L_s} \quad \cos \varphi \cong 1 \quad (5.8)$$

Zakładając ponadto (zgodnie z rzeczywistością), że przyśpieszenie  $\frac{dv_m}{dt}$  punktu  $M$  nie przekracza wartości  $1 \text{ m/s}^2$ , a prędkość kątowa wahadła  $\omega$  nie przekracza wartości  $0,1 \text{ s}^{-1}$ , można nie popełniając błędu większego niż 3% pominąć w zależności (5.7) w nawiasie składniki skrajne. Wówczas po uwzględnieniu związku (5.8) zależność na siłę  $S_l$  przyjmuje postać uproszczoną (5.9).

$$S_l \cong m_Q \cdot g \quad (5.9)$$

Składową poziomą  $H$  siły  $S_l$  można określić zależnością (5.10).

$$H = S_l \cdot \sin \varphi = S_l \cdot \frac{x_Q}{L_s} \cong \frac{m_Q \cdot g}{L_s} \cdot x_Q = c_Q \cdot x_Q \quad c_Q = \frac{m_Q \cdot g}{L_s} \quad (5.10)$$

Przy przyjętych założeniach składowa pozioma  $H$  jest wprost proporcjonalna do względnego wychylenia ładunku  $x_Q$ , a współczynnik proporcjonalności  $c_Q$  nazwany został sztywnością poziomą zawieszenia ładunku.

Po uwzględnieniu zależności (5.10) na składową poziomą  $H$  równanie ruchu mostu w płaszczyźnie poziomej (5.3) przyjmuje postać (5.11).

$$m_m \cdot \frac{dv_m}{dt} = c_m \cdot x_m + f_m \cdot (v_c - v_m) - c_Q \cdot x_Q \quad (5.11)$$



Równanie ruchu ładunku w płaszczyźnie poziomej przyjmuje postać (5.12).

$$m_Q \cdot \frac{dv_Q}{dt} = H + R \quad (5.12)$$

$$m_Q \cdot \frac{dv_Q}{dt} = c_Q \cdot x_Q - f_Q \cdot v_Q$$

$R = -f_Q \cdot v_Q$  - siła oporu powietrza dla ładunku.

Stosując oznaczenia z rys. 5.3 można prędkość całkowitą punktu materialnego Q przedstawić jako sumę wektorową prędkości punktu zawieszenia ładunku M oraz prędkości punktu Q względem M.

$$\bar{v}_Q = \bar{v}_m + \bar{v}_{QM} \quad v_{QM} = \omega \cdot L_s \quad (5.13)$$

Po zrzutowaniu równania wektorowego (5.13) na osie x i y otrzymuje się dwa równania skalarne (5.14).

$$v_{Qx} = v_Q = v_m + \omega \cdot L_s \cdot \cos \varphi \quad (5.14)$$

$$v_{Qy} = -\omega \cdot L_s \cdot \sin \varphi$$

Uwzględniając zależność (5.8) oraz pamiętając, że prędkość kątowa wahadła  $\omega$  jest pochodną kąta wychylenia wahadła  $\varphi$  ze znakiem minus (według oznaczeń z rys. 5.3), można wyprowadzić poniższe zależności.

$$v_Q = v_m + \omega \cdot L_s \rightarrow \omega = \frac{v_Q - v_m}{L_s} \rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = -\omega = \frac{v_m - v_Q}{L_s} \quad (5.15)$$

$$\varphi \cong \sin \varphi = \frac{x_Q}{L_s} \rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{L_s} \cdot \frac{dx_Q}{dt}$$

Porównując prawe strony wyrażen na pochodną kąta  $\varphi$  względem czasu w wyrażeniu (5.15) uzyskać można brakujące równanie stanu na pochodną względnego wychylenia ładunku  $x_Q$  względem czasu.

$$\frac{dx_Q}{dt} = v_m - v_Q \quad (5.16)$$

Porządkując zależności (5.1) ÷ (5.16) można uzyskać opis matematyczny całego układu w przestrzeni zmiennych stanu w postaci (5.17).

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= -\frac{a}{c} \cdot p - \frac{2 \cdot q_s}{c \cdot D_k} \cdot v_c + \frac{\omega_p}{c} \cdot q_p \\
 \frac{dv_c}{dt} &= \frac{q_s}{m_c \cdot D_k} \cdot p - \left( \frac{2 \cdot f_s}{m_c \cdot D_k^2} + \frac{f_m}{2 \cdot m_c} \right) \cdot v_c + \frac{f_m}{2 \cdot m_c} \cdot v_m - \frac{c_m}{2 \cdot m_c} \cdot x_m - \frac{W_j}{2 \cdot m_c} \\
 \frac{dv_m}{dt} &= \frac{f_m}{m_m} \cdot v_c - \frac{f_m}{m_m} \cdot v_m + \frac{c_m}{m_m} \cdot x_m - \frac{c_Q}{m_m} \cdot x_Q \\
 \frac{dv_Q}{dt} &= -\frac{f_Q}{m_Q} \cdot v_Q + \frac{c_Q}{m_Q} \cdot x_Q \\
 \frac{dx_m}{dt} &= v_c - v_m \\
 \frac{dx_Q}{dt} &= v_m - v_Q
 \end{aligned}$$

(5.17)

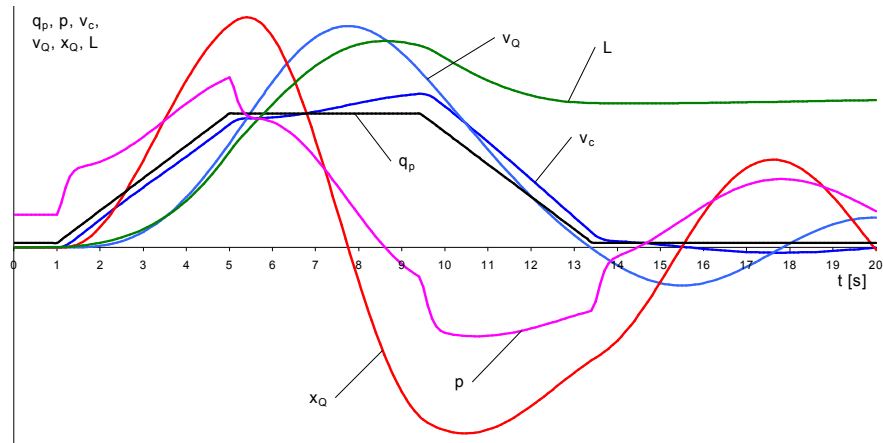
Rozważany mechanizm jazdy opisany został stacjonarnym liniowym układem równań różniczkowych VI rzędu.

Warunki początkowe równowagi dla układu (5.17) są niezerowe. Można je wyznaczyć, zakładając spoczynek układu i przyrównując prawe strony równań (5.17) do zera. Przyjmują one postać (5.18).

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \frac{W_j \cdot D_k}{2 \cdot q_s}, \quad v_{c0} = 0, \quad v_{m0} = 0, \quad v_{Q0} = 0, \quad x_{m0} = 0, \quad x_{Q0} = 0, \\
 q_{p0} &= \frac{W_j \cdot D_k \cdot a}{2 \cdot q_s \cdot \omega_p}
 \end{aligned}$$

(5.18)

Przykładowe przebiegi czasowe ciśnienia  $p$ , prędkości  $v_c$  i  $v_Q$ , wahań ładunku  $x_Q$  oraz pracy  $L$  wykonanej przez pompę dla sterowania  $q_p$  według funkcji liniowej „trapezowej” pokazano na rys. 5.4.



Rys. 5.4. Przykładowe wyniki badań symulacyjnych dla sterowania według funkcji „trapezowej”.

Dokonano przesunięcia układu odniesienia zmiennych stanu i wymuszenia wg zależności (2.7), tak aby jego początek odpowiadał warunkom początkowym równowagi (5.18). Po dokonaniu tej operacji opis matematyczny modelu zostaje pozbawiony wolnego wyrazu i przyjmuje postać (5.19).

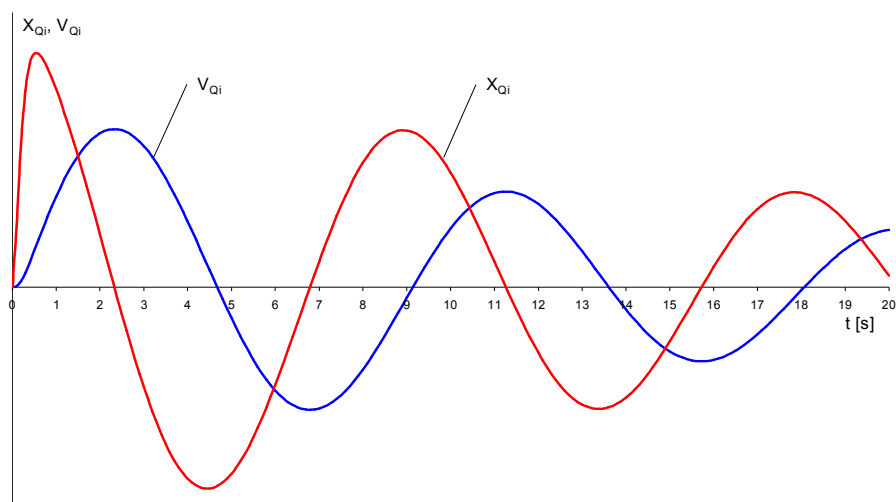
$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{a}{c} \cdot p - \frac{2 \cdot q_s}{c \cdot D_k} \cdot v_c + \frac{\omega_p}{c} \cdot q_p \\ \frac{dv_c}{dt} &= \frac{q_s}{m_c \cdot D_k} \cdot p - \left( \frac{2 \cdot f_s}{m_c \cdot D_k^2} + \frac{f_m}{2 \cdot m_c} \right) \cdot v_c + \frac{f_m}{2 \cdot m_c} \cdot v_m - \frac{c_m}{2 \cdot m_c} \cdot x_m \\ \frac{dv_m}{dt} &= \frac{f_m}{m_m} \cdot v_c - \frac{f_m}{m_m} \cdot v_m + \frac{c_m}{m_m} \cdot x_m - \frac{c_Q}{m_m} \cdot x_Q \\ \frac{dv_Q}{dt} &= -\frac{f_Q}{m_Q} \cdot v_Q + \frac{c_Q}{m_Q} \cdot x_Q \\ \frac{dx_m}{dt} &= v_c - v_m \\ \frac{dx_Q}{dt} &= v_m - v_Q \end{aligned} \quad (5.19)$$

Warunki początkowe równowagi dla zmiennych stanu i sterowania w nowym układzie odniesienia są zerowe.

$$\begin{aligned} p_0 = 0, \quad v_{c0} = 0, \quad v_{m0} = 0, \quad v_{Q0} = 0, \quad x_{m0} = 0, \quad x_{Q0} = 0, \\ q_{p0} = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Przyjmując maksymalną wartość wymuszenia  $q_{pm}$  (liczoną w nowym układzie odniesienia) określono warunki równowagi układu w ruchu ustalonym, odpowiadające jeździe suwnicy z maksymalną prędkością.

Dla celów optymalizacji wyznaczono odpowiedź dynamiczną układu na pojedynczy impuls sterujący o podstawie  $\Delta t$  i wysokości 1. Otrzymano w ten sposób przebiegi czasowe wszystkich zmiennych stanu, czyli ciągi wartości  $\{P_i\}$ ,  $\{V_{ci}\}$ ,  $\{V_{mi}\}$ ,  $\{V_{Qi}\}$ ,  $\{X_{mi}\}$ ,  $\{X_{Qi}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Na rys. 5.5 pokazano przykładowo ciągi wartości  $\{V_{Qi}\}$  oraz  $\{X_{Qi}\}$ .

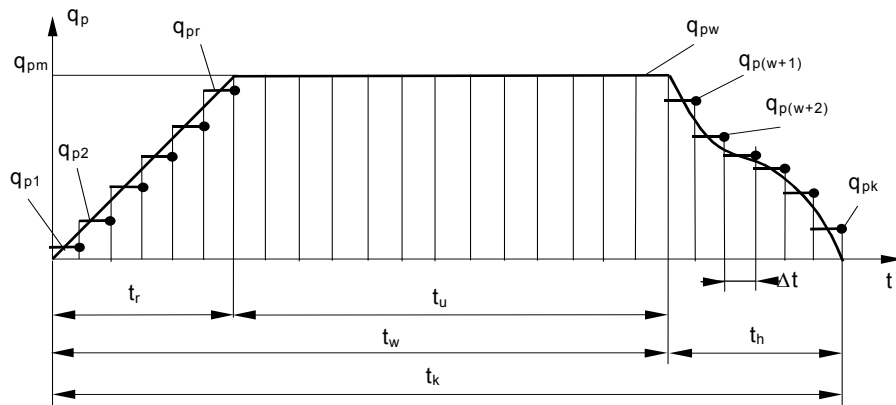


Rys. 5.5. Odpowiedź dynamiczna układu na jednostkowy impuls sterujący  $\Delta t \cdot 1$ .

## 5.2. Optymalny przebieg funkcji sterującej przy hamowaniu.

Jak już wspomniano, badaniu poddano ruch roboczy mechanizmu obejmujący rozruch, ruch ustalony i hamowanie (rys. 5.1). W niniejszym

rozdziale rozwiązane zostało zagadnienie optymalizacji przy hamowaniu. W okresie rozruchu, dla czasu  $t \in (0, t_r)$  przyjęto liniowe narastanie wielkości sterującej od zera do  $q_{pm}$ , w czasie ruchu ustalonego, dla czasu  $t \in (t_r, t_w)$  przyjęto stałą wartość sterowania  $q_p = q_{pm}$ . Poszukiwano optymalnego przebiegu funkcji sterującej w okresie hamowania zatrzymującego, dla czasu  $t \in (t_w, t_k)$ , kiedy wielkość sterująca maleje od wartości  $q_{pm}$  do zera. Wszystkie wartości  $q_p$  obliczane są w nowym, przesuniętym układzie odniesienia. Pokazano to rys. 5.6 dla ujęcia ciągłego i dyskretnego.



Rys. 5.6. Optymalizacja hamowania. Przebieg sterowania w ruchu roboczym.

Przyjęto wskaźnik jakości pierwszego typu o strukturze (3.25), który dla rozważanego w tym rozdziale przypadku przyjmuje postać (5.21).

$$I = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot p_k^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m_c \cdot v_{ck}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_m \cdot v_{mk}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot v_{Qk}^2 + \frac{1}{2} \cdot c_m \cdot x_{mk}^2 + \frac{1}{2} \cdot c_Q \cdot x_{Qk}^2 \quad (5.21)$$

Wskaźnik (5.21) jest miarą energii wewnętrznej układu w chwili  $t_k$  na końcu ruchu roboczego po zatrzymaniu mechanizmu. Indeks „k” przy zmiennych stanu oznacza ich wartości w chwili  $t_k$ . O wielkości energii wewnętrznej modelu decyduje głównie energia wahającego się ładunku, ponieważ sztywność pozioma jego zawieszenia jest bardzo mała w porównaniu ze sztywnościami innych więzi. Można zatem uprościć

wyrażenie (5.21), biorąc pod uwagę jedynie składniki związane z wahającym się ładunkiem. Uproszczony wskaźnik jakości ma postać (5.22).

$$I = \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot v_{Qk}^2 + \frac{1}{2} \cdot c_Q \cdot x_{Qk}^2 \quad (5.22)$$

Wskaźnik (5.22) jest miarą energii  $E_k$  zmagazynowanej w wahającym się ładunku po zakończeniu ruchu roboczego.

Wskaźnik (5.22) uzależniony został od ciągu impulsów sterujących w okresie hamowania  $\{q_{pi}\} = \{q_{p(w+1)}, q_{p(w+2)}, \dots, q_{pk}\}$ .

$$\begin{aligned} v_{Qk} &= \sum_{i=1}^{i=k} v_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} = \sum_{i=1}^{i=w} v_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} + \sum_{i=w+1}^{i=k} v_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} = \\ &= C_v + \sum_{i=w+1}^{i=k} v_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} \quad \sum_{i=1}^{i=w} v_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} = C_v = \text{const} \\ x_{Qk} &= \sum_{i=1}^{i=k} x_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} = \sum_{i=1}^{i=w} x_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} + \sum_{i=w+1}^{i=k} x_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} = \\ &= C_x + \sum_{i=w+1}^{i=k} x_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} \quad \sum_{i=1}^{i=w} x_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} = C_x = \text{const} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(q_{p(w+1)}, q_{p(w+2)}, \dots, q_{pk}) &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot \left( C_v + \sum_{i=w+1}^{i=k} v_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_Q \cdot \left( C_x + \sum_{i=w+1}^{i=k} x_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Na ciąg impulsów sterujących  $\{q_{pi}\} = \{q_{p(w+1)}, q_{p(w+2)}, \dots, q_{pk}\}$  lub współrzędne punktu  $\mathbf{U}(q_{p(w+1)}, q_{p(w+2)}, \dots, q_{pk})$  w przestrzeni  $h = (k - w)$ -wymiarowej nałożone zostały ograniczenia typu (3.20) i (3.21), które w rozważanym przypadku przyjmują postać (5.24).

$$\begin{aligned} 0 \leq q_{pi} \leq q_{pm} & \quad i = w + 1, w + 2, \dots, k \\ |q_{p(j+1)} - q_{pj}| \leq a & \quad j = w + 1, w + 2 \dots k - 1 \\ q_{pm} - q_{p(w+1)} \leq a \wedge q_{pk} \leq a & \quad a > 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Liczba  $a$  została tak dobrana, aby zmiany wielkości sterującej nie były zbyt szybkie i nie wywołały poślizgu między kołem napędzanym i szyną.

Zadanie optymalizacji sformułowane zostało w następujący sposób: należy znaleźć taki punkt  $\hat{\mathbf{U}}(\hat{q}_{p(w+1)}, \hat{q}_{p(w+2)}, \dots, \hat{q}_{pk})$  w  $h$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych, który należąc do obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  danego równaniami (5.24) minimalizuje wskaźnik jakości (5.23).

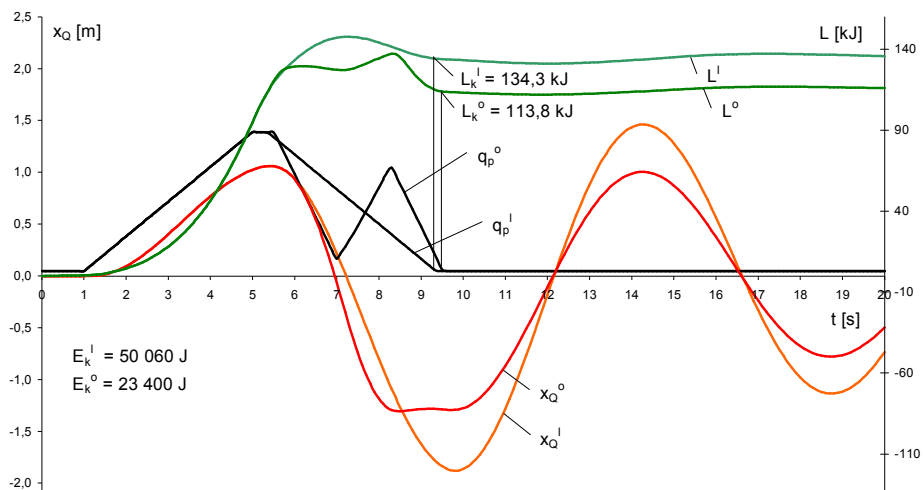
Określone zostały składowe gradientu wskaźnika jakości  $I$  względem zmiennych  $q_{p(w+1)}, q_{p(w+2)}, \dots, q_{pk}$ . Określają je zależności (5.25).

$$\frac{\partial I}{\partial q_{pi}} = m_Q \cdot v_{Qk} \cdot V_{Q(k-i+1)} + c_Q \cdot x_Q \cdot X_{Q(k-i+1)} \quad i = w+1, w+2, \dots, k \quad (5.25)$$

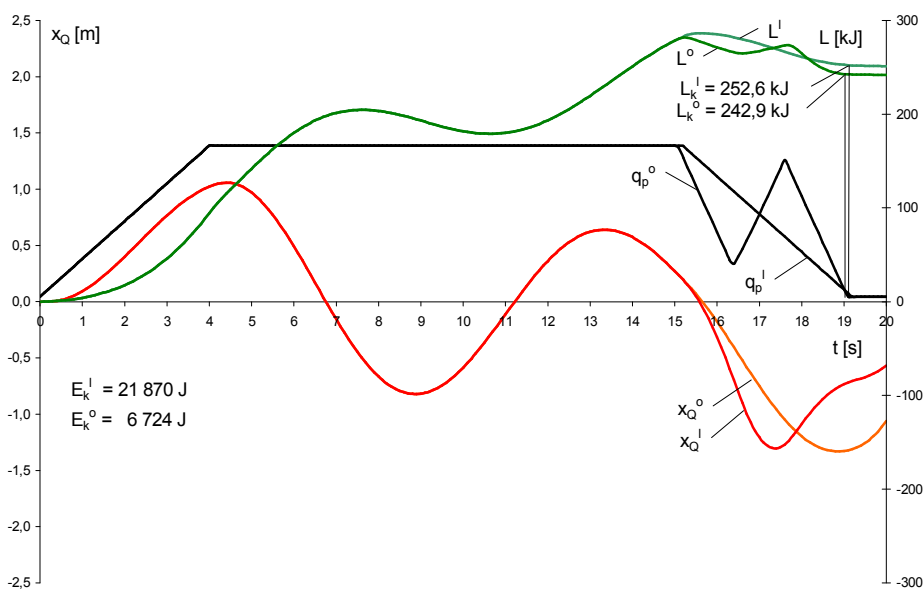
Optymalizację przeprowadzono wg procedury opisanej w rozdziale 3.3.

Współrzędne punktu początkowego  $\mathbf{U}(q_{p(w+1)}, q_{p(w+2)}, \dots, q_{pk})$  przyjęto tak, aby odpowiadały liniowemu spadkowi funkcji sterującej w czasie hamowania. Badania prowadzono dla założonych czasów rozruchu  $t_r$  oraz hamowania  $t_h$ , natomiast czas ruchu ustalonego  $t_u$  dobierano za każdym razem tak, aby przemieszczenie mostu suwnicy osiągnęło zadaną wartość  $s_z$ .

Przeprowadzono serię badań optymalizacyjnych dla czasu rozruchu  $t_r = 4$  s i czasu hamowania  $t_h = 4$  s i różnych przemieszczeń mostu. Efekt optymalizacji mierzono energią  $E_k$  zmagazynowaną w wahającym się ładunku po zakończeniu hamowania. Zaobserwowano silną zależność efektu optymalizacji od fazy wahań ładunku przypadającej na początek hamowania. Dlatego badaniami objęto taki zakres przemieszczeń mostu  $s_z$  (od 5 m do 18 m), który odpowiada wszystkim możliwym fazom wahań ładunku.



Rys. 5.7. Optymalizacja hamowania,  $t_r = t_h = 4$  s,  $s_z = 5$  m.



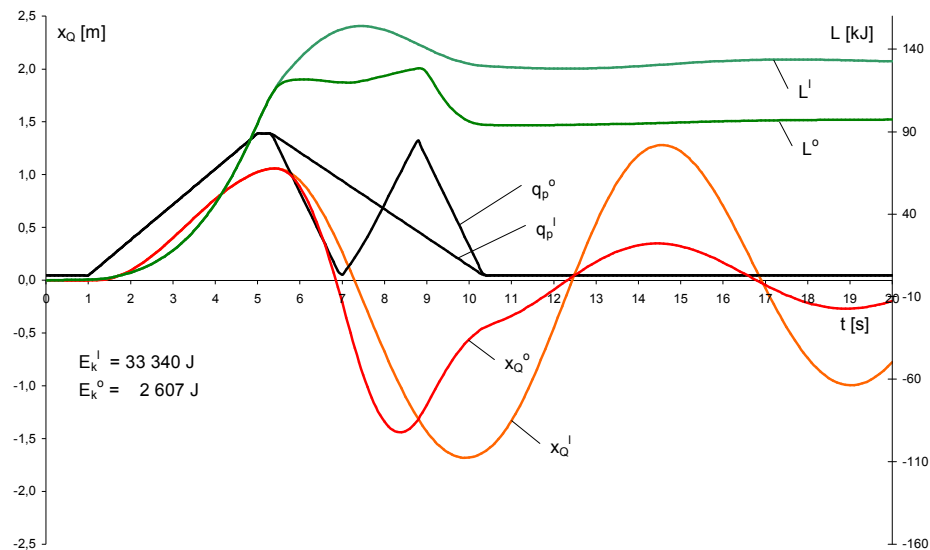
Rys. 5.8. Optymalizacja hamowania,  $t_r = t_h = 4$  s,  $s_z = 18$  m.



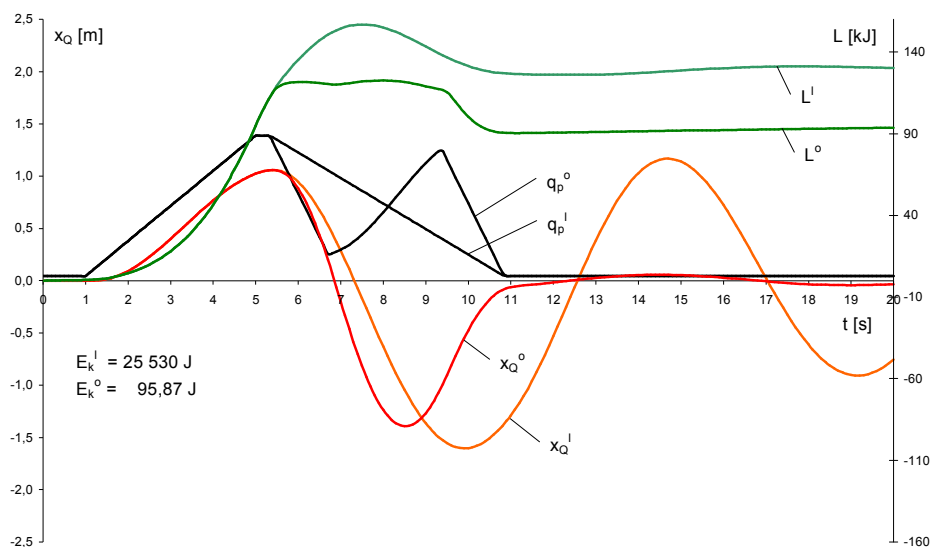
Wyniki optymalizacji hamowania przedstawiono przykładowo na rysunkach 5.7 i 5.8. Pokazano na nich przebiegi czasowe sterowania  $q_p$ , wahań ładunku  $x_Q$  oraz pracy  $L$  wykonanej przez pompę w ruchu roboczym. Zaznaczono również wartości energii  $E_k$  oraz pracy  $L_k$  wykonanej na koniec ruchu roboczego. Indeksami „I” i „O” oznaczono wielkości odpowiadające sterowaniu odpowiednio wg funkcji liniowej i optymalnej.

Uznano w rozważanym przypadku, że efekt optymalizacji można uznać za zadawalający, jeżeli energia wahań ładunku  $E_k$  zostanie obniżona do umownej wartości 100 J, co odpowiada wahaniom ładunku o amplitudzie nie przekraczającej 1 cm. Przy czasach ruchów nieustalonych  $t_r = t_h = 4$  s można to osiągnąć jedynie przy wybranych przemieszczeniach  $s_z$ .

W poszukiwaniu lepszego efektu optymalizacji wybrano z powyższych badań przypadek, w którym był on najslabszy. Przeprowadzono cykl badań symulacyjnych dla stałego czasu rozruchu  $t_r = 4$  s i ruchu ustalonego  $t_u = 0,33$  s (odpowiadających najbardziej niekorzystnej fazie początku hamowania) przy zmieniającym się czasie hamowania  $t_h$ . Przykładowe wyniki badań przedstawiono na rysunkach 5.9 i 5.10.



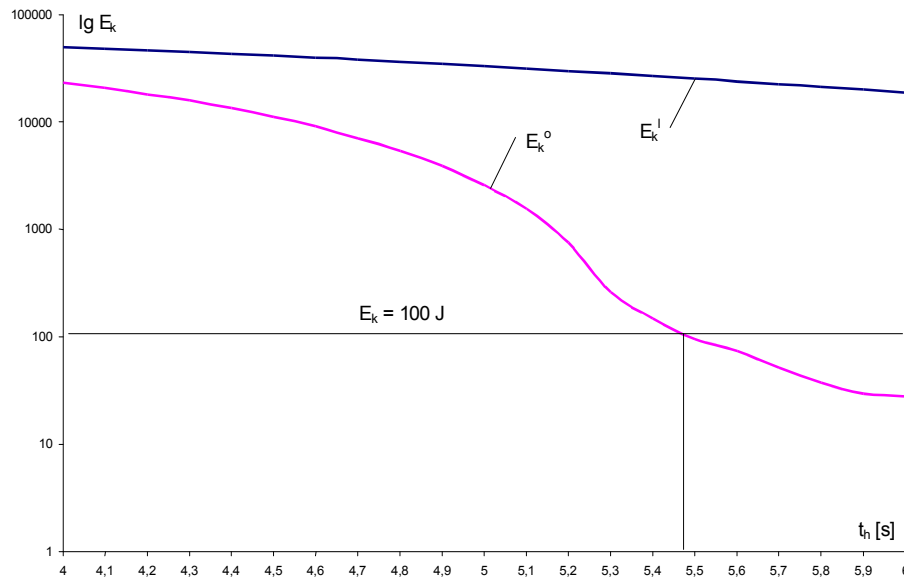
Rys. 5.9. Optymalizacja hamowania,  $t_r = 4$  s,  $t_u = 0,33$  s,  $t_h = 5$  s.



Rys. 5.10. Optymalizacja hamowania,  $t_r = 4\text{ s}$ ,  $t_u = 0,33\text{ s}$ ,  $t_h = 5,5\text{ s}$ .

Na rys. 5.11 w skali półlogarytmicznej przedstawiono zależność energii wahań ładunku  $E_k$  od czasu hamowania  $t_h$  (dla  $t_r = 4\text{ s}$ ,  $t_u = 0,33\text{ s}$ ) dla hamowania wg funkcji liniowej (indeks „l”) oraz optymalnej (indeks „o”).

Obie linie mają charakter malejący, przy czym linia  $E_k^o$  odpowiadająca sterowaniu optymalnemu przebiega znacznie poniżej linii  $E_k^l$  odpowiadającej sterowaniu wg funkcji liniowej. Linia  $E_k^o$  osiąga wartości mniejsze od granicy umownej  $100\text{ J}$  dla czasów hamowania  $t_h$  większych od  $5,5\text{ s}$ , linia  $E_k^l$  nie osiąga ich w ogóle w zakresie czasów hamowania  $t_h$  mających sens fizyczny.



Rys. 5.11. Energia wahań ładunku  $E_k$  dla  $t_r = 4$  s,  $t_u = 0,33$  s dla różnych czasów  $t_h$  przy sterowaniu liniowym i optymalnym.

### 5.3. Optymalny przebieg funkcji sterującej przy rozruchu i hamowaniu.

W celu dalszego pogłębienia efektu optymalizacji rozszerzono ją również na okres rozruchu. Optymalizacja prowadzona była w dwóch etapach: w pierwszym poszukiwano takiej funkcji sterującej przy rozruchu, aby po jego zakończeniu uzyskać jak najmniejsze wahanie ładunku względem mostu, w drugim, znaną już metodą, określano optymalne sterowanie przy hamowaniu.

Dla celów optymalizacji rozruchu przyjęto nowy wskaźnik jakości sterowania.

$$W = \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot (v_{Qr} - v_u)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_Q \cdot (x_{Qr} - x_u)^2 \quad (5.26)$$

$v_{Qr}$  - prędkość ładunku po zakończeniu rozruchu,  
 $v_u$  - prędkość ładunku w ruchu ustalonym,

$x_{Qr}$  - względne wychylenie ładunku po zakończeniu rozruchu,  
 $x_u$  - względne wychylenie ładunku w ruchu ustalonym.

Wskaźnik (5.26) posiada wymiar energii i jest proporcjonalny do różnicy całkowitej energii ładunku w ruchu ustalonym i rzeczywistej energii ładunku po zakończeniu rozruchu. Wskaźnik przyjmuje wartość zero, jeżeli prędkość i wychylenie względne ładunku po zakończeniu rozruchu są równe odpowiednim wartościom w ruchu ustalonym.

Wartości zmiennych stanu w ruchu ustalonym wyznaczono przyjmując maksymalną wartość sterowania  $q_{pm}$  oraz przyrównując prawe strony układu (5.19) do zera. Otrzymuje się wówczas związki (5.27).

$$q_{pu} = q_{pm}$$

$$p_u = \frac{\left(\frac{2 \cdot f_s}{D_k^2} + \frac{f_Q}{2}\right) \cdot \omega_p \cdot q_{pm}}{a \cdot \left(\frac{2 \cdot f_s}{D_k^2} + \frac{f_Q}{2}\right) + \frac{2 \cdot q_s^2}{D_k^2}}, \quad v_{cu} = v_{mu} = v_{Qu} = \frac{\omega_p \cdot q_{pm} \cdot \frac{q_s}{D_k}}{a \cdot \left(\frac{2 \cdot f_s}{D_k^2} + \frac{f_Q}{2}\right) + \frac{2 \cdot q_s^2}{D_k^2}}$$

$$x_{mu} = \frac{f_Q \cdot \omega_p \cdot q_{pm} \cdot \frac{q_s}{D_k}}{c_m \cdot a \cdot \left(\frac{2 \cdot f_s}{D_k^2} + \frac{f_Q}{2}\right) + \frac{2 \cdot q_s^2}{D_k^2}}, \quad x_{Qu} = \frac{f_Q \cdot \omega_p \cdot q_{pm} \cdot \frac{q_s}{D_k}}{c_Q \cdot a \cdot \left(\frac{2 \cdot f_s}{D_k^2} + \frac{f_Q}{2}\right) + \frac{2 \cdot q_s^2}{D_k^2}} \quad (5.27)$$

Wskaźnik (5.26) uzależniony został od ciągu impulsów sterujących w okresie rozruchu  $\{q_{pi}\} = \{q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr}\}$ .

$$v_{Qr} = \sum_{i=1}^{i=r} V_{Q(r-i+1)} \cdot q_{pi} \quad x_{Qr} = \sum_{i=1}^{i=r} X_{Q(r-i+1)} \cdot q_{pi}$$

$$W(q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr}) = \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot \left( \sum_{i=1}^{i=r} V_{Q(r-i+1)} \cdot q_{pi} - v_u \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_Q \cdot \left( \sum_{i=1}^{i=r} X_{Q(r-i+1)} \cdot q_{pi} - x_u \right)^2 \quad (5.28)$$

Na ciąg impulsów sterujących  $\{q_{pi}\} = \{q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr}\}$  lub współrzędne punktu  $\mathbf{U}(q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr})$  w przestrzeni  $r$ -wymiarowej nałożone zostały ograniczenia typu (3.20) i (3.21), które w rozważanym przypadku przyjmują postać (5.29).

$$\begin{aligned} 0 \leq q_{pi} \leq q_{pm} & \quad i = 1, 2, \dots, r \\ |q_{p(j+1)} - q_{pj}| \leq a & \quad j = 1, 2, \dots, r-1 \\ q_{p1} \leq a \wedge q_{pm} - q_{pk} \leq a & \quad a > 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Liczba  $a$  została tak dobrana, aby zmiany wielkości sterującej nie były zbyt szybkie i nie wywołały poślizgu między kołem napędzanym i szyną.

Zadanie optymalizacji sformułowane zostało w następujący sposób: należy znaleźć taki punkt  $\hat{\mathbf{U}}(\hat{q}_{p1}, \hat{q}_{p2}, \dots, \hat{q}_{pr})$  w  $r$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych, który należąc do obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  danego równaniami (5.29) minimalizuje wskaźnik jakości (5.28).

Określone zostały składowe gradientu wskaźnika jakości  $I$  względem zmiennych  $q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr}$ . Określają je zależności (5.30).

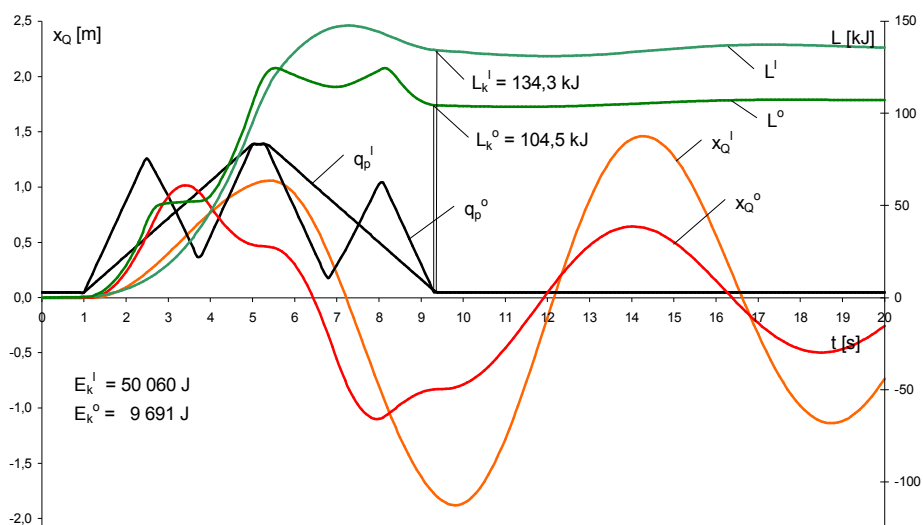
$$\frac{\partial W}{\partial q_{pi}} = m_Q \cdot v_{Qk} \cdot V_{Q(r-i+1)} + c_Q \cdot x_Q \cdot X_{Q(r-i+1)} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5.30)$$

Optymalizację rozruchu przeprowadzono wg procedury opisanej w rozdziale 3.3. Współrzędne punktu początkowego  $\mathbf{U}(q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pr})$  przyjęto tak, aby odpowiadały liniowemu spadkowi funkcji sterującej w czasie rozruchu. Potem wg procedury opisanej w rozdziale 5.2 przeprowadzono optymalizację hamowania. Badania prowadzono dla założonych czasów rozruchu  $t_r$  oraz hamowania  $t_h$ , natomiast czas ruchu

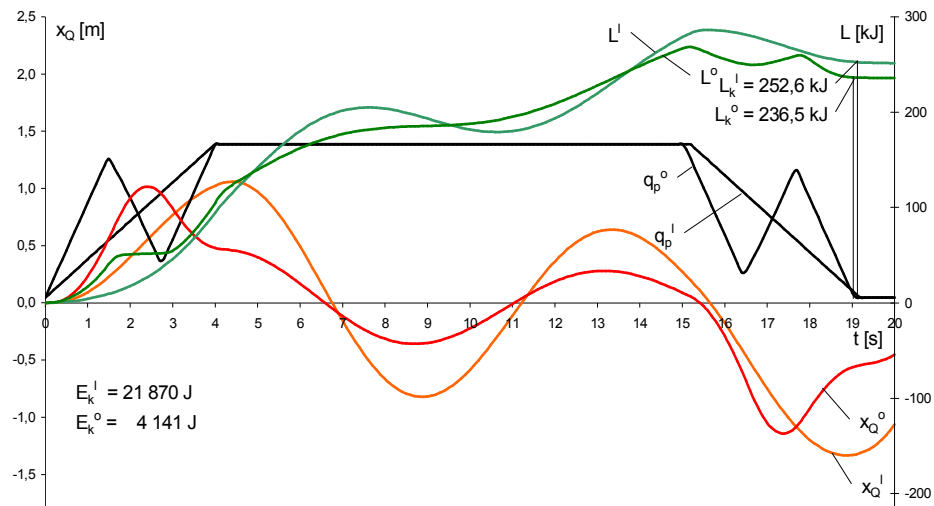
ustalonego  $t_u$  dobierano za każdym razem tak, aby przemieszczenie mostu suwnicy osiągnęło zadaną wartość  $s_z$ .

Przeprowadzono serię badań optymalizacyjnych dla czasu rozruchu  $t_r = 4$  s i czasu hamowania  $t_h = 4$  s i różnych przemieszczeń mostu. Efekt optymalizacji mierzono energią  $E_k$  zmagazynowaną w wahającym się ładunku po zakończeniu ruchu roboczego. Podobnie jak poprzednio, zaobserwowano silną zależność efektu optymalizacji od fazy wahań ładunku przypadającej na początek hamowania. Badaniami objęto taki zakres przemieszczeń mostu  $s_z$  (od 5 m do 18 m), który odpowiada wszystkim możliwym fazom wahań ładunku.

Wyniki optymalizacji rozruchu i hamowania przedstawiono przykładowo na rysunkach 5.12 i 5.13. Pokazano na nich przebiegi czasowe sterowania  $q_p$ , wahań ładunku  $x_Q$  oraz pracy  $L$  wykonanej przez pompę w ruchu roboczym. Zaznaczono również wartości energii  $E_k$  oraz pracy  $L_k$  wykonanej na koniec ruchu roboczego. Indeksami „l” i „o” oznaczono wielkości odpowiadające sterowaniu odpowiednio wg funkcji liniowej „trapezowej” i optymalnej.



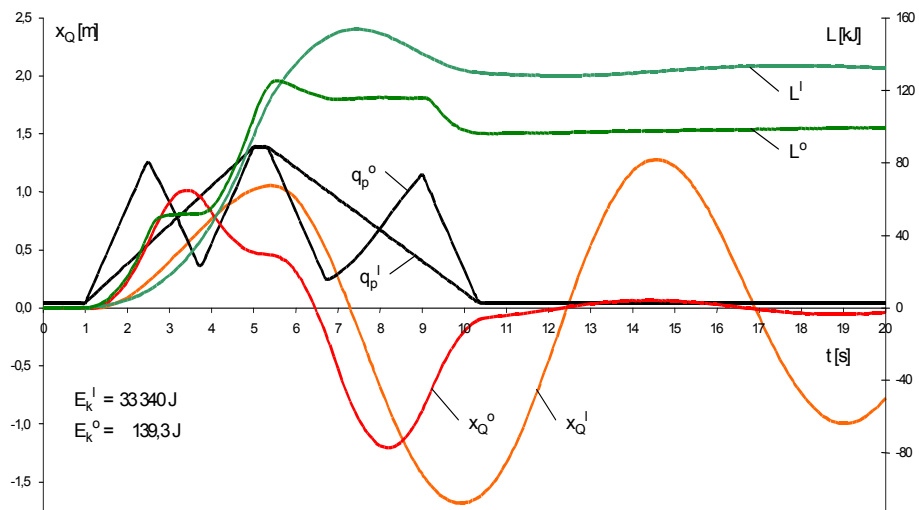
Rys. 5.12. Optymalizacja rozruchu i hamowania,  $t_r = t_h = 4$  s,  $s_z = 5$  m.



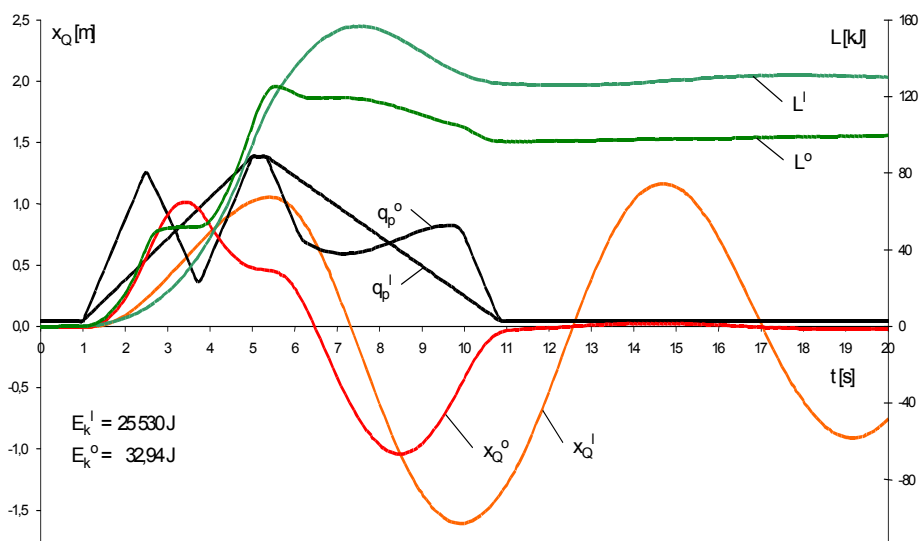
Rys. 5.13. Optymalizacja rozruchu i hamowania,  $t_r = t_h = 4$  s,  $s_z = 18$  m.

Stosując optymalizację rozruchu i hamowania, przy czasach ruchów nieustalonych  $t_r = t_h = 4$  s w ogóle nie udało się obniżyć energii wahań ładunku  $E_k$  do umownej wartości 100 J.

Przeprowadzono cykl badań symulacyjnych dla stałych czasów rozruchu  $t_r = 4$  s i ruchu ustalonego  $t_u = 0,33$  s (odpowiadających najbardziej niekorzystnej fazie początku hamowania) przy zmieniającym się czasie hamowania  $t_h$ . Przykładowe wyniki badań przedstawiono na rysunkach 5.14 i 5.15. Pokazano na nich przebiegi czasowe sterowania  $q_p$  oraz wahań ładunku  $x_Q$  i pracy  $L$  wykonanej przez pompę w ruchu roboczym dla sterowania według funkcji liniowej „trapezowej” (indeks „l”) oraz funkcji optymalnej przy rozruchu i hamowaniu (indeks „o”).



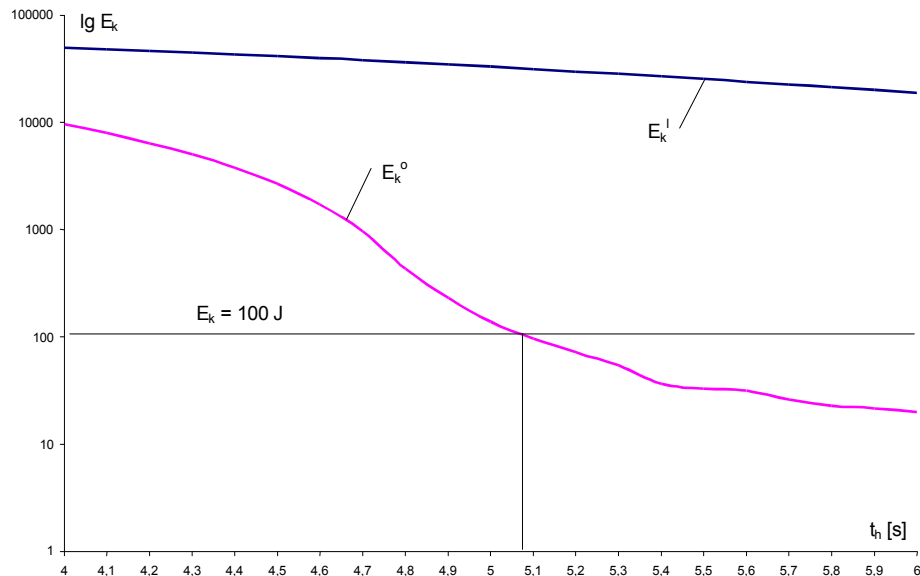
Rys. 5.14. Optymalizacja rozruchu i hamowania,  
 $t_r = 4 \text{ s}$ ,  $t_u = 0,33 \text{ s}$ ,  $t_h = 5 \text{ s}$ .



Rys. 5.15. Optymalizacja rozruchu i hamowania,  
 $t_r = 4 \text{ s}$ ,  $t_u = 0,33 \text{ s}$ ,  $t_h = 5,5 \text{ s}$ .



Na rys. 5.16 w skali półlogarytmicznej przedstawiono zależność energii wahań ładunku  $E_k$  od czasu hamowania  $t_h$  (dla  $t_r = 4$  s,  $t_u = 0,33$  s) dla rozruchu i hamowania wg funkcji liniowej (indeks „l”) oraz dla rozruchu i hamowania wg funkcji optymalnej (indeks „o”).



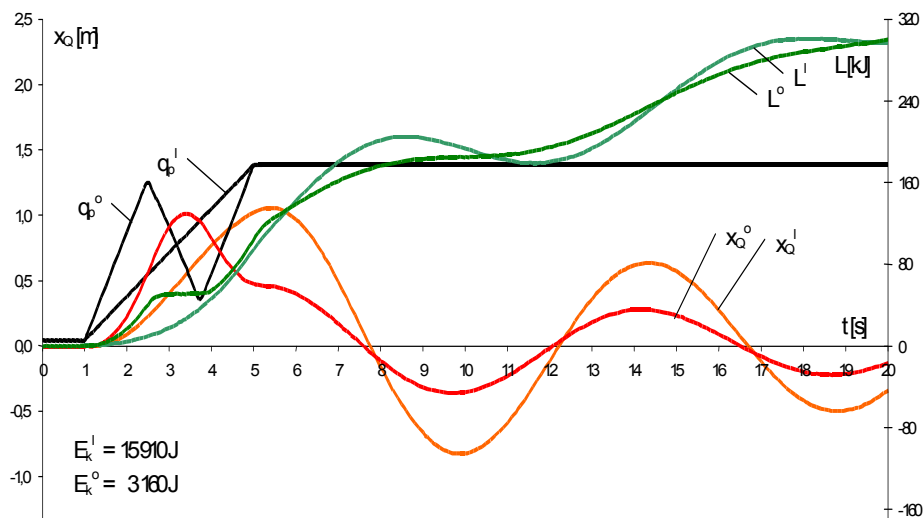
Rys. 5.16. Energia wahań ładunku  $E_k$  dla  $t_r = 4$  s,  $t_u = 0,33$  s dla różnych czasów  $t_h$  przy sterowaniu liniowym i optymalnym.

Obie linie mają charakter malejący, przy czym linia  $E_k^o$  odpowiadająca sterowaniu optymalnemu przebiega znacznie poniżej linii  $E_k^l$  odpowiadającej sterowaniu wg funkcji liniowej. Łatwo zauważyć, że linia  $E_k^o$  na rys. 5.15, uzyskana przy zastosowaniu optymalizacji rozruchu i hamowania, leży poniżej analogicznej linii na rys. 5.10, uzyskanej przy zastosowaniu jedynie optymalizacji hamowania, i osiąga wartości mniejsze od granicy umownej 100 J już dla czasów hamowania  $t_h$  większych od 5,1 s. Linia  $E_k^l$  jest identyczna na rysunkach 5.10 i 5.15.

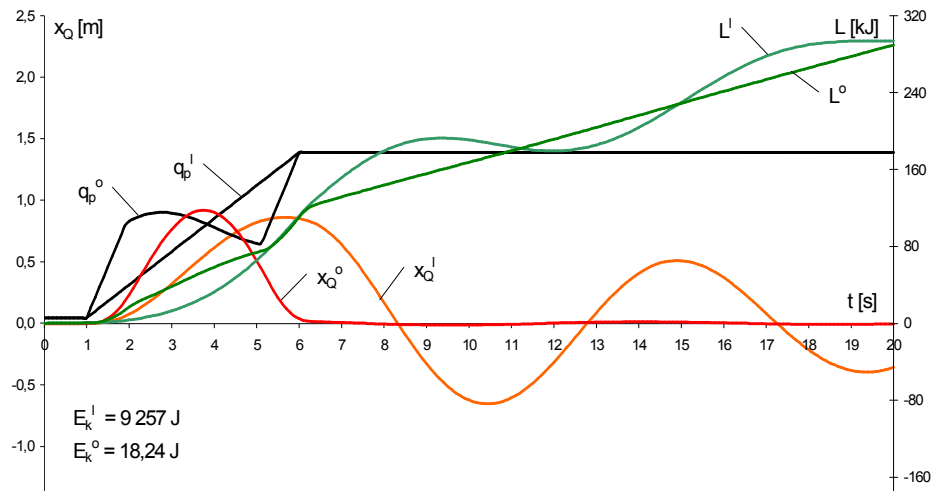
#### 5.4. Optymalny sposób sterowania w ruchu roboczym.

W poszukiwaniu lepszego efektu optymalizacji wykonano serię badań optymalizacyjnych rozruchu mechanizmu dla różnych czasów rozruchu  $t_r$ . Optymalizację prowadzono wg procedury opisanej w rozdziale 5.3.

Na rysunkach 5.17 i 5.18 dla dwóch wybranych czasów rozruchu pokazano przykładowo przebiegi czasowe sterowania  $q_p$ , wahań ładunku  $x_Q$  oraz pracy  $L$  wykonanej przez pompę w ruchu roboczym. Zaznaczono również wartości wskaźnika jakości rozruchu  $W$  opisanego zależnością (5.28). Indeksami „l” i „o” oznaczono wielkości odpowiadające sterowaniu odpowiednio wg funkcji liniowej i optymalnej.

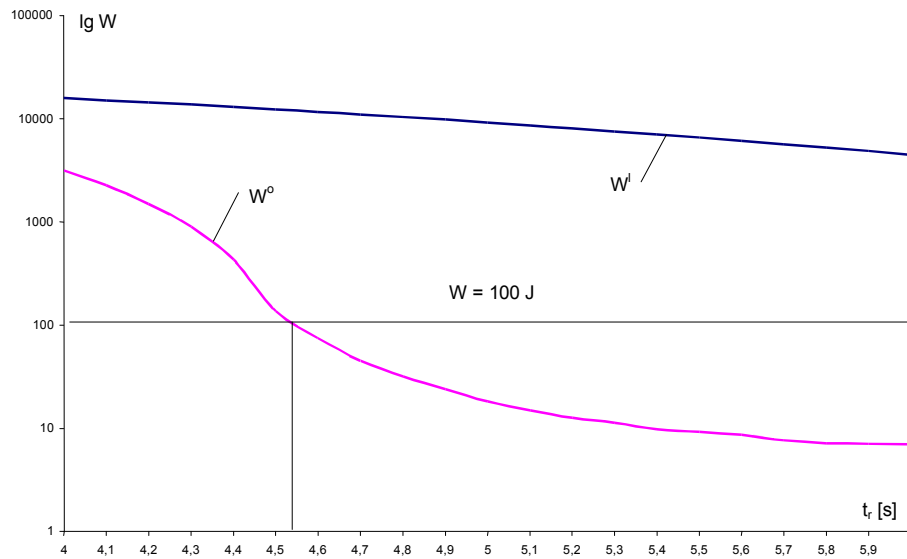


Rys. 5.17. Optymalizacja rozruchu,  $t_r = 4$  s.



Rys. 5.18. Optymalizacja rozruchu,  $t_r = 5 \text{ s}$ .

Na rys. 5.19 pokazano w skali półlogarytmicznej zależność wskaźnika jakości rozruchu  $W$  od czasu rozruchu  $t_r$ .



Rys. 5.19. Wskaźnik jakości rozruchu  $W$  dla różnych czasów rozruchu  $t_r$  przy sterowaniu według funkcji liniowej i optymalnym.

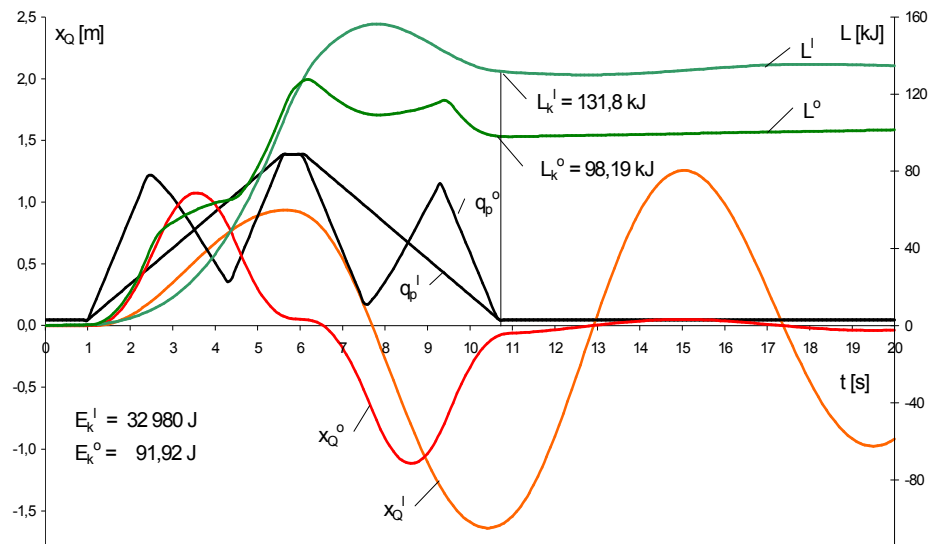
Linia  $W^o$ , odpowiadająca rozruchom optymalnym, leży znacznie poniżej linii  $W^l$ , odpowiadającej rozruchom wg funkcji liniowej, i posiada charakter malejący. Wartości mniejsze od granicy umownej 100 J osiągnięte zostają dla czasów rozruchu  $t_r$  większych od 4,6 s. Przeprowadzenie rozruchu optymalnego w czasie  $t_r = 4,6$  s lub większym gwarantuje bardzo małe wahania ładunku w czasie całego ruchu ustalonego, co polepsza walory eksploatacyjne mechanizmu jazdy suwnicy. Ponadto efekt hamowania optymalnego przestaje zależeć od fazy wahań ładunku i przeprowadzenie hamowania optymalnego również w czasie  $t_h = 4,6$  s pozwala zmniejszyć energię wahań ładunku  $E_k$  po zakończeniu ruchu roboczego poniżej granicy umownej 100 J niezależnie od przebytej przez most drogi.

Dla rozpatrywanego mechanizmu jazdy mostu suwnicy przyjęto zatem następujący optymalny sposób sterowania:

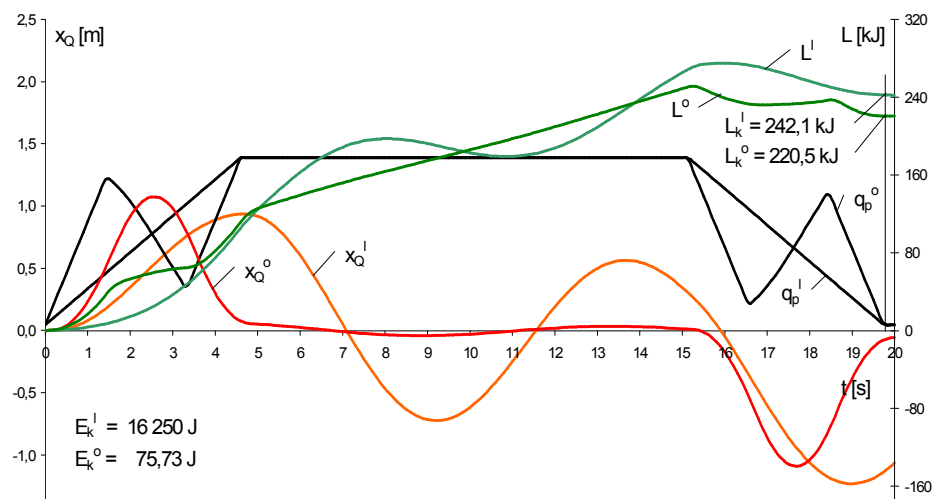
- a) rozruch optymalny w czasie  $t_r = 4,6$  s,
- b) ruch ustalony w czasie  $t_u$  stosownym do zadanego przemieszczenia  $s_z$ ,
- c) hamowanie optymalne w czasie  $t_h = 4,6$  s.

Przeprowadzono serię badań symulacyjnych przy zastosowaniu optymalnego sposobu sterowania dla różnych przemieszczeń  $s_z$  suwnicy. W każdym przypadku uzyskano bardzo dobry efekt optymalizacji ( $E_k < 100$  J).

Wyniki zastosowania optymalnego sposobu sterowania w ruchu roboczym przedstawiono przykładowo na rysunkach 5.20 i 5.21. Pokazano na nich przebiegi czasowe sterowania  $q_p$ , wahań ładunku  $x_Q$  oraz pracy  $L$  wykonanej przez pompę w ruchu roboczym. Zaznaczono również wartości energii  $E_k$  oraz pracy  $L_k$  wykonanej na koniec ruchu roboczego. Indeksami „l” i „o” oznaczono wielkości odpowiadające sterowaniu odpowiednio wg funkcji liniowej i optymalnej.



Rys. 5.20. Optymalny sposób sterowania,  
 $t_r = 4,6$  s,  $t_h = 4,6$  s,  $s_z = 6$  m.



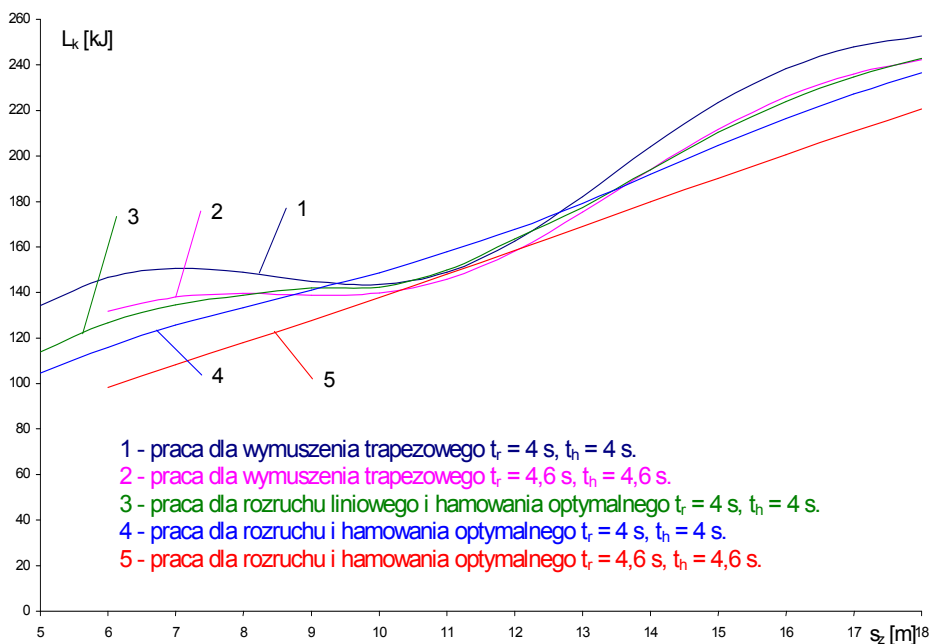
Rys. 5.21. Optymalny sposób sterowania,  
 $t_r = 4,6$  s,  $t_h = 4,6$  s,  $s_z = 18$  m.

### 5.5. Bilans energetyczny ruchu roboczego.

Dokonano porównania różnych sposobów sterowania ruchem roboczym mechanizmu pod względem energetycznym. Wyróżniono następujące sposoby sterowania:

- 1) rozruch i hamowanie wg funkcji liniowej ( $t_r = 4$  s,  $t_h = 4$  s),
- 2) rozruch i hamowanie wg funkcji liniowej ( $t_r = 4,6$  s,  $t_h = 4,6$  s),
- 3) rozruch wg funkcji liniowej, hamowanie wg funkcji optymalnej ( $t_r = 4$  s,  $t_h = 4$  s),
- 4) rozruch i hamowanie wg funkcji optymalnej ( $t_r = 4$  s,  $t_h = 4$  s),
- 5) optymalny sposób sterowania ( $t_r = 4,6$  s,  $t_h = 4,6$  s).

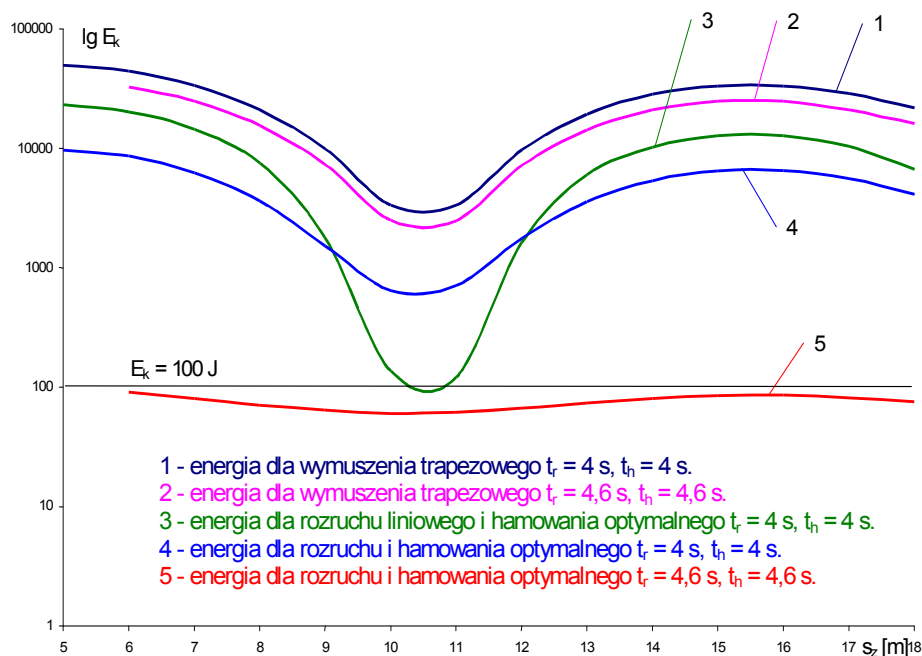
Na rys 5.22 pokazano wykresy prac  $L_k$  potrzebnych dla zrealizowania przez most suwnicy zadanego przemieszczenia  $s_z$  w funkcji tegoż przemieszczenia przy wymienionych pięciu sposobach sterowania.



Rys. 5.22. Zależność prac  $L_k$  od przemieszczenia  $s_z$  dla różnych sposobów sterowania.

Wszystkie krzywe mają charakter rosnący. W przypadku linii 1 i 2 zaznacza się silna zależność pracy  $L_k$  od fazy wahań ładunku. Najmniejsze wartości pracy  $L_k$  uzyskano dla optymalnego sposobu sterowania (linia 4). Zależność  $L_k(s_z)$  jest tutaj liniowa, co oznacza całkowitą niezależność od fazy wahań ładunku. Zastosowanie optymalnego sposobu sterowania wydłuża nieco czas trwania ruchu roboczego w stosunku do trzech pozostałych, jednak różnice są w każdym przypadku mniejsze od 1 s.

Na rys. 5.23 w skali półlogarytmicznej pokazano zależność energii  $E_k$  zmagazynowanej w wahającym się ładunku po zakończeniu ruchu roboczego od przemieszczenia  $s_z$  dla czterech sposobów sterowania.



Rys. 5.23. Zależność energii  $E_k$  od przemieszczenia  $s_z$  dla różnych sposobów sterowania.

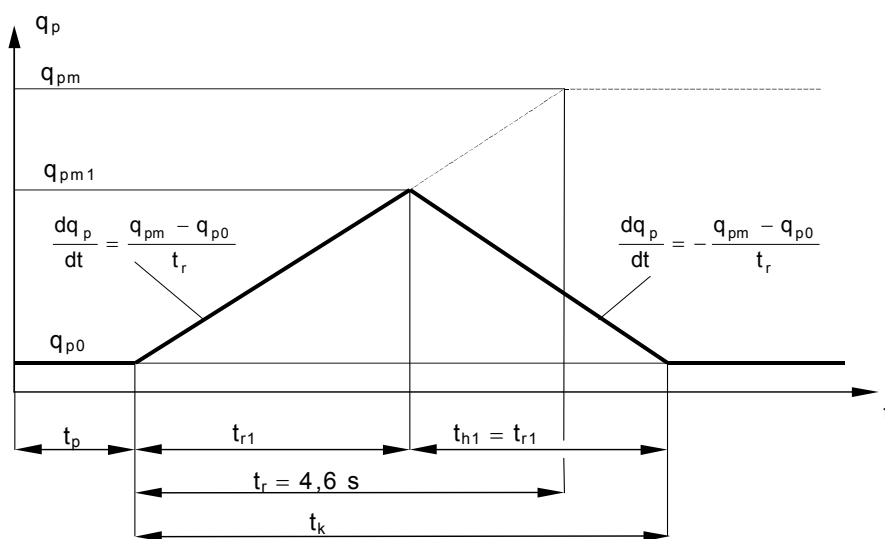
Zaznacza się silna zależność krzywych 1, 2 i 3 od fazy wahań ładunku. Zastosowanie sterowania optymalnego (krzywe 2 i 3) obniża energię  $E_k$  w stosunku do sterowania liniowego (krzywa 1). Jednak dopiero zastosowanie optymalnego sposobu sterowania (krzywa 4) daje

najlepszy efekt i pozwala na obniżenie energii  $E_k$  poniżej umownej granicy 100 J niezależnie od przemieszczenia  $s_z$ .

### 5.6. Sterowanie optymalne przy małych przemieszczeniach.

Optymalny sposób sterowania, zaprezentowany powyżej, przynosi pożądane efekty jedynie dla takich przemieszczeń suwnicy  $s_z$ , które umożliwiały rozwinięcie przez mechanizm maksymalnej prędkości jazdy, odpowiadającej maksymalnej wydajności jednostkowej pompy  $q_{pm}$ .

Przy małych przemieszczeniach mostu osiągnięcie maksymalnej prędkości nie jest możliwe z uwagi na ograniczenia przyśpieszeń, wynikające z poślizgu między kołem jezdny i szyną. W ruchu roboczym nie występuje zatem faza ruchu ustalonego, a przy sterowaniu wg funkcji liniowej bezpośrednio po rozruchu w czasie  $t_r < 4,8$  s następuje hamowanie w czasie  $t_h = t_r$ . Wielkość prędkości zmian wielkości sterującej  $q_p$  (przyśpieszenia) określona została na tym samym poziomie, jak w optymalnym sposobie sterowania, odpowiadającym osiągnięciu wartości maksymalnej  $q_{pm}$  w czasie 4,6 s. Wyjaśnia to rys. 5.24.



Rys. 5.24. Sterowanie liniowe przy małym przemieszczeniu.



Przyjęty został wskaźnik jakości postaci (5.22) odpowiadający energii  $E_k$  zmagazynowanej w wahającym się ładunku po zakończeniu ruchu roboczego.

Wskaźnik uzależniony został od ciągu impulsów sterujących w okresie całego ruchu roboczego  $\{q_{pi}\} = \{q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pk}\}$ .

$$v_{Qk} = \sum_{i=1}^{i=k} v_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} \quad x_{Qk} = \sum_{i=1}^{i=k} x_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi}$$

$$I(q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pk}) = \tag{5.31}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot \left( \sum_{i=1}^{i=k} v_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_Q \cdot \left( \sum_{i=1}^{i=k} x_{Q(k-i+1)} \cdot q_{pi} \right)^2$$

Na ciąg impulsów sterujących  $\{q_{pi}\} = \{q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pk}\}$  lub współrzędne punktu  $\mathbf{U}(q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pk})$  w przestrzeni  $k$ -wymiarowej nałożone zostały ograniczenia typu (3.20) i (3.21), które w rozważanym przypadku przyjmują postać (5.32).

$$\begin{aligned} 0 \leq q_{pi} \leq q_{pm} & \quad i = 1, 2, \dots, k \\ |q_{p(j+1)} - q_{pj}| \leq a & \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \\ q_{p1} \leq a \wedge q_{pk} \leq a & \quad a > 0 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Liczba  $a$  została tak dobrana, aby zmiany wielkości sterującej nie były zbyt szybkie i nie wywołały poślizgu między kołem napędzanym i szyną.

Zadanie optymalizacji sformułowane zostało w następujący sposób: należy znaleźć taki punkt  $\hat{\mathbf{U}}(\hat{q}_{p1}, \hat{q}_{p2}, \dots, \hat{q}_{pk})$  w  $k$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych, który należąc do obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $\Phi$  danego równaniami (5.32) minimalizuje wskaźnik jakości (5.31).

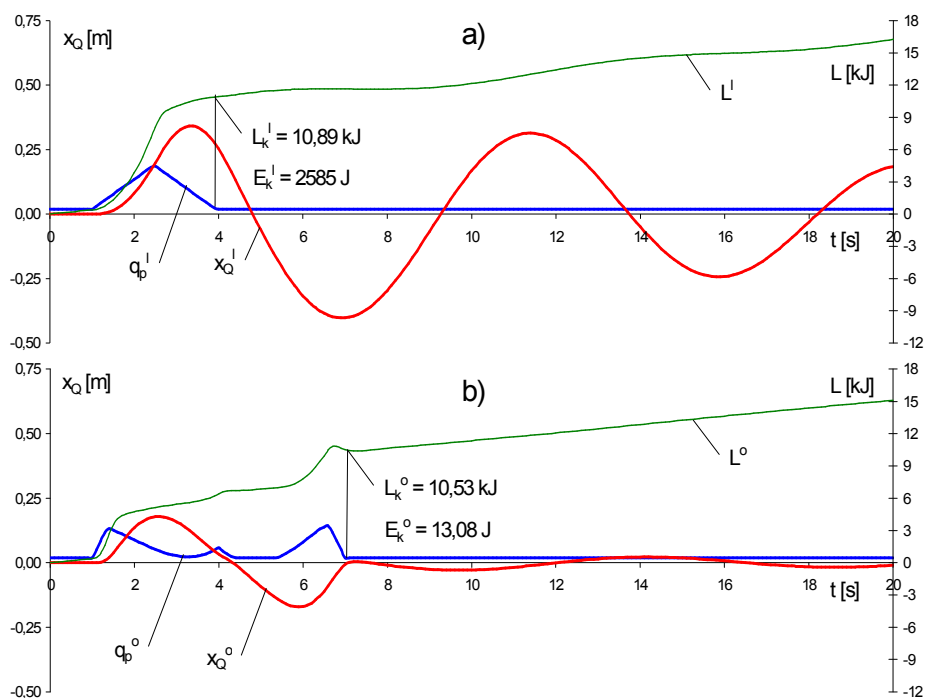
Określone zostały składowe gradientu wskaźnika jakości  $I$  względem zmiennych  $q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pk}$ . Określają je zależności (5.33).

$$\frac{\partial I}{\partial q_{pi}} = m_Q \cdot v_{Qk} \cdot v_{Q(k-i+1)} + c_Q \cdot x_{Qk} \cdot x_{Q(k-i+1)} \quad i = 1, 2, \dots, k \tag{5.33}$$

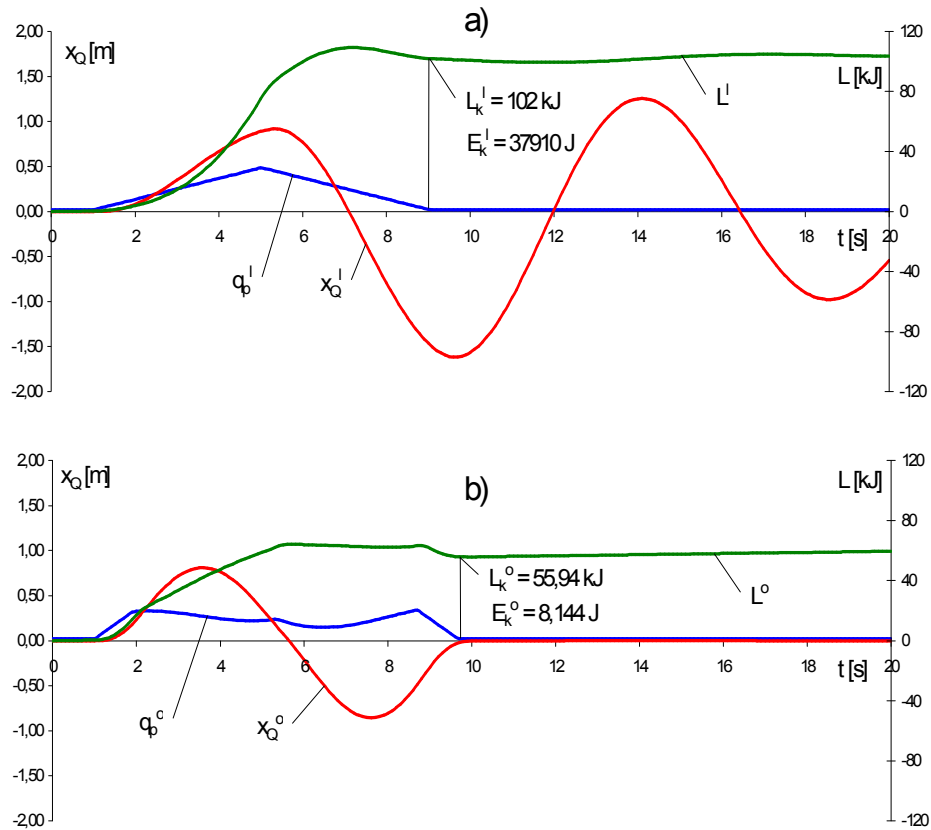
Optymalizację przeprowadzono wg procedury opisanej w rozdziale 3.3.

Współrzędne punktu początkowego  $\mathbf{U}(q_{p1}, q_{p2}, \dots, q_{pk})$  przyjęto tak, aby odpowiadały liniowemu narastaniu funkcji sterującej w czasie rozruchu oraz liniowemu spadkowi funkcji sterującej w czasie hamowania (rys. 5.24). Czas ruchu roboczego  $t_k$  dobierano za każdym razem tak, aby przemieszczenie mostu suwnicy osiągnęło zadaną wartość  $s_z$ .

Przeprowadzono serię badań optymalizacyjnych dla różnych przemieszczeń mostu  $s_z$ . Na rysunkach 5.25 i 5.26 przedstawiono przykładowo przebiegi czasowe wydajności pompy  $q_p$  przy sterowaniu wg funkcji liniowej „a)” oraz optymalnej „b)” oraz odpowiadające im przebiegi względnych wahań ładunku  $x_Q$ . Zaznaczono na nich również wartości energii  $E_k$  zmagazynowanej w wahającym się ładunku oraz pracy  $L_k$  wykonanej przez pompę na koniec ruchu roboczego.

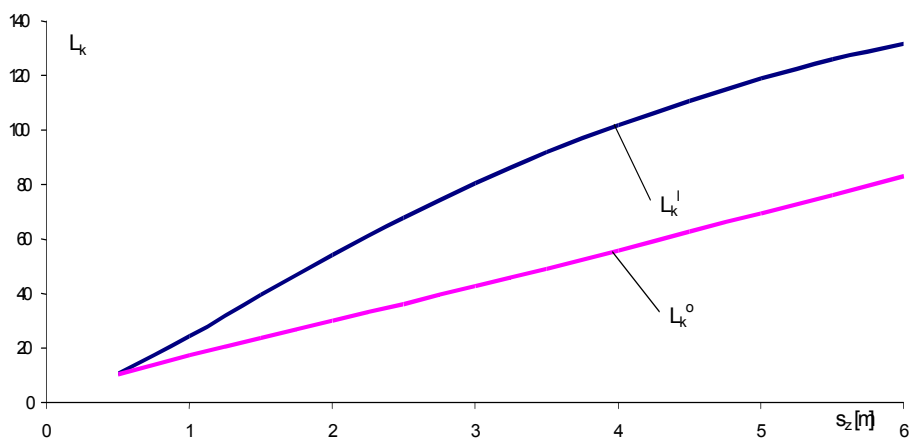


Rys. 5.25. Sterowanie liniowe i optymalne,  $s_z = 0,5$  m.



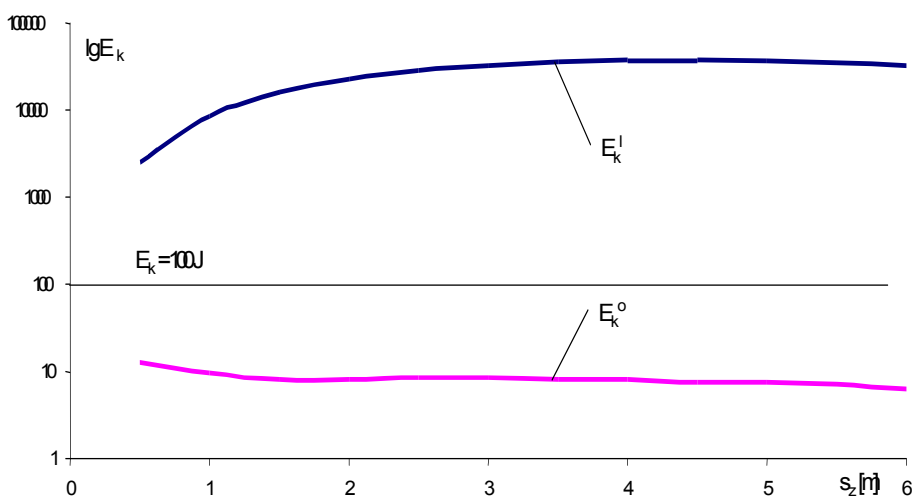
Rys. 5.26. Sterownie liniowe i optymalne,  $s_z = 4$  m.

Bilans energetyczny ruchu roboczego przedstawiony został na rys. 5.27. Pokazano na nim zależność między pracą wykonaną przez pompę przy sterowaniu wg funkcji liniowej ( $L_k^l$ ) oraz optymalnej ( $L_k^o$ ) i przemieszczeniem mostu suwnicy  $s_z$  w ruchu roboczym.



Rys. 5.27. Zależność pracy  $L_k$  od przemieszczenia  $s_z$ .

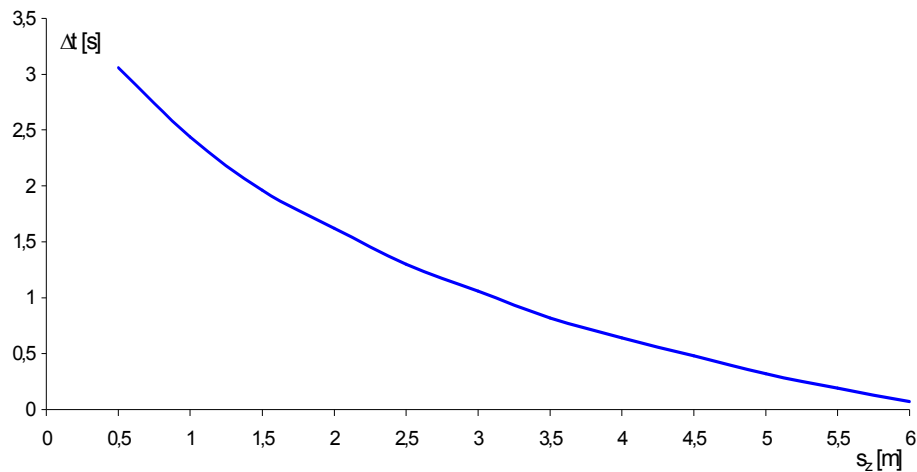
Na rys. 5.28 w skali półlogarytmicznej pokazano zależność energii zmagazynowanej w wahającym się ładunku po zakończeniu ruchu roboczego przy sterowaniu wg funkcji liniowej ( $E_k^I$ ) oraz optymalnej ( $E_k^O$ ) i przemieszczeniem mostu suwnicy  $s_z$ .



Rys. 5.28. Zależność energii wahań ładunku  $E_k$  od przemieszczenia  $s_z$ .

W każdym przypadku praca wykonana nad układem przy sterowaniu optymalnym jest mniejsza od analogicznej pracy przy sterowaniu wg funkcji liniowej, a energia  $E_k$  zmagazynowana w wahającym się ładunku po zakończeniu ruchu roboczego jest przy sterowaniu optymalnym zawsze mniejsza od umownej granicy 100 J.

Zastosowanie sterownia optymalnego wydłuża nieco czas trwania ruchu roboczego  $t_k$  w stosunku do sterowania wg funkcji liniowej przy tym samym przemieszczeniu  $s_z$ . Na rys. 5.29 pokazano zależność odpowiednich różnic czasu trwania ruchu roboczego  $\Delta t_k$  przy sterowaniu liniowym i optymalnym od przemieszczenia  $s_z$  mostu suwnicy.



Rys. 5. 29. Zależność różnicy czasu  $\Delta t_k$  od przemieszczenia  $s_z$ .

Zależność ma charakter malejący. Różnica czasu  $\Delta t_k$  osiąga najwyższe wartości dla bardzo małych przemieszczeń  $s_z$  (dla  $s_z = 0,5$  m  $\rightarrow \Delta t_k = 3$  s) i maleje do zera przy przemieszczeniach rzędu 6 m.

### 5.7. Podsumowanie.

Przeprowadzone badania optymalizacyjne wykazały, że dla hydrostatycznego mechanizmu jazdy mostu suwnicy można za pomocą zaproponowanej metody wyznaczyć optymalną funkcję sterującą, która

umożliwia wytłumienie wahań ładunku po okresach rozruchu i hamowania, zarówno dla dużych, jak i małych przemieszczeń.

Napęd hydrostatyczny z pompą o zmiennej pojemności jednostkowej daje możliwość ciągłego sterowania prędkością i dzięki temu jest przydatny dla zastosowania sterowań optymalnych. Współczesne, sterowane elektrycznie układy zmiany wydajności pompy mogą współpracować z komputerem i zapewniają realizację ruchu roboczego w trybie sterowania programowego.

Wypracowanie optymalnej funkcji sterującej zajmuje komputerowi czas kilku sekund. Wynika to między innymi z konieczności stosowania metody iteracji przy określaniu czasu ruchu roboczego, tak aby zrealizować zadane przemieszczenie mostu. Aby przyspieszyć proces określania funkcji optymalnej, należy zmagazynować w pamięci komputera pakiet sterowań optymalnych dla najczęściej realizowanych ruchów roboczych i wykorzystać je do szybkiego znajdowania odpowiedniego sterowania optymalnego, aby wygenerować je potem w czasie rzeczywistym.

Wytłumienie wahań ładunku po okresie rozruchu podnosi walory eksploatacyjne suwnicy, natomiast minimalizacja wahań ładunku po zatrzymaniu maszyny daje podstawy do automatyzacji ruchu roboczego, w tym również pozycjonowania ładunku.

Zastosowanie sterowania optymalnego polepsza bilans energetyczny ruchu roboczego, co jest zrozumiałe, ponieważ nie jest tracona energia zmagazynowana w wahającym się ładunku.

Zastosowanie sterowania optymalnego wydłuża nieco czas trwania ruchu roboczego w stosunku do sterowania wg funkcji liniowej, jednak różnice nie przekraczają 1 s, jedynie przy przemieszczeniach rzędu 0,5 m dochodzą do 3 s. Różnica ta może zostać skompensowana brakiem konieczności stosowania czasochłonnych ruchów dojazdowych.

## **6. OPTYMALNE STEROWANIE MECHANIZMEM JAZDY MOSTU SUWNICY POMOSTOWEJ Z NAPĘDEM FALOWNIKOWYM.**

W poprzednim rozdziale omówiono sposoby wyznaczania sterowań optymalnych dla mechanizmu jazdy suwnicy pracującej w systemie tzw. „otwartego” układu sterowania. Dla zrealizowania założonych celów, polegających na wytlumieniu wahań ładunku po okresach rozruchu i hamowania oraz zrealizowaniu założonego przemieszczenia mostu, zastosowano czasochłonne procedury iteracyjne. Ponadto badania dotyczyły układu symetrycznego, gdzie wózek umieszczony był na środku mostu, a zachowania dynamiczne obydwu czołownic były identyczne.

W rzeczywistości mechanizm jazdy mostu suwnicy jest poddany działaniu zakłóceń, które mogą zmienić przebieg ruchu roboczego w przypadku otwartego układu sterowania. Dodatkowo różne położenie wózka na moście powoduje różne obciążenie i różne opory ruchu czołownic, co z kolei, przy zastosowaniu napędów indywidualnych, może wywołać zjawisko ukosowania. W konsekwencji ruch suwnicy nie jest do końca zdeterminowany, co przy sterowaniu optymalnym zakłóca efekt eliminacji wahań ładunku, jak również dokładność dojazdu do zadanego położenia.

W celu uniezależnienia się od zakłóceń należy zastosować system napędowy, który, oprócz wymaganej możliwości ciągłego sterowania prędkością, zaopatrzone jest w układy regulacji zarówno prędkości, jak i przemieszczenia.

Rozwinięte w ostatnim czasie napędy elektryczne z przetwornicami częstotliwości, współpracującymi z silnikami asynchronicznymi zwartymi, posiadają cechy, które umożliwiają zastosowanie tych układów w automatycznych systemach sterowania dźwignic. Jeżeli dodatkowo w mechanizmie jazdy mostu stosuje się układy regulacji prędkości i przemieszczenia, to ruch mostu stosunkowo dokładnie odwzorowuje funkcję sterującą (prędkości czołownic są proporcjonalne do wartości sygnału sterującego). W efekcie zadanie optymalizacji może zostać

ograniczone tylko do minimalizacji energii wewnętrznej zawieszzonego na linach ładunku.

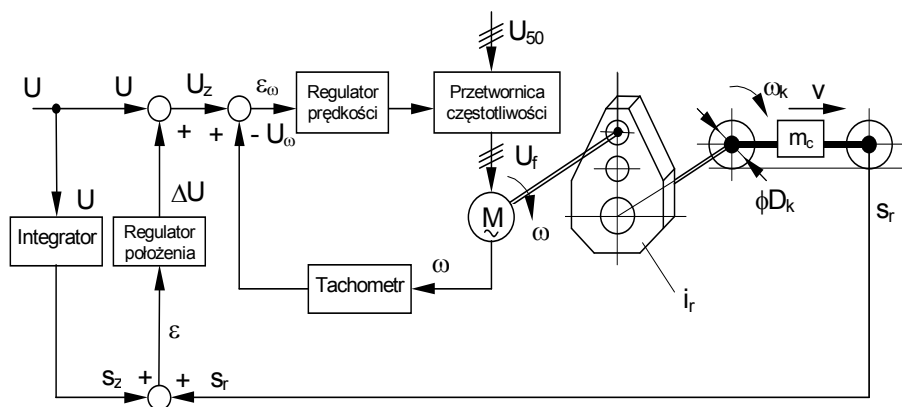
### **6.1. Układy regulacji prędkości i przemieszczenia oraz ich modele.**

W Zakładzie MRiNH opracowana została struktura i dobrane zostały parametry układu sterowania mechanizmem jazdy czołownicy, zaopatrzonego w układy regulacji prędkości i przemieszczenia (prace [53], [54]). Jego schemat pokazano na rys. 6.1. We współczesnych przetwornicach częstotliwości układ regulacji prędkości zrealizowany jest przez system mikroprocesorowy samego falownika, natomiast układ regulacji przemieszczenia został zrealizowany przez osobny sterownik mikroprocesorowy własnej konstrukcji. Widać na rysunku, że układ regulacji prędkości zawiera elementy typowe: tor sprzężenia zwrotnego prędkości kątowej silnika elektrycznego  $\omega$  (proporcjonalnej do prędkości kątowej  $\omega_k$  koła napędowego oraz, przy braku poślizgu, do prędkości  $v$  czołownicy), węzeł sumacyjny oraz regulator, natomiast układ regulacji przemieszczenia w sposób ciągły dokonuje porównania sygnału proporcjonalnego do przemieszczenia zadanego  $s_z$  oraz przemieszczenia rzeczywistego  $s_r$ . Uchyb przemieszczenia  $\varepsilon_s$ , po przejściu przez regulator, koryguje napięciowy sygnał sterujący  $U$ , proporcjonalny do prędkości zadanej czołownicy. Sygnał przemieszczenia zadanego  $s_z$  uzyskuje się przez ciągłe całkowanie

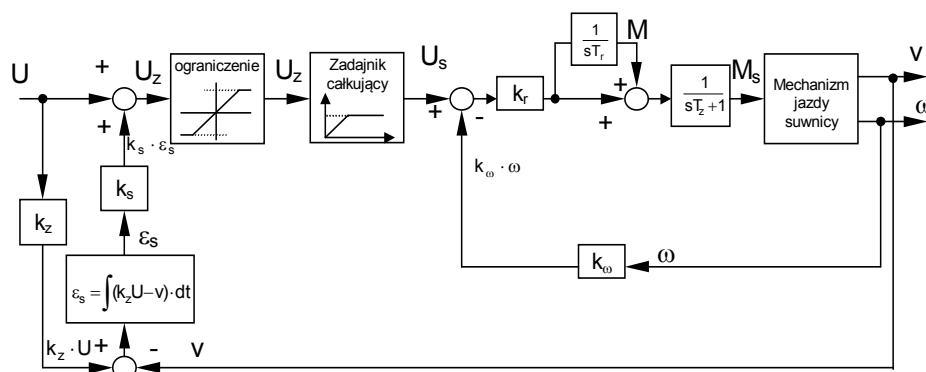
$$\text{sygnału sterującego } \left( s_z = \int_0^t k_z \cdot U \cdot dt \right).$$

Opracowany został model dynamiczny układu sterowania. Jego schemat pokazano na rys. 6.2. Wyróżnić można w nim dwie części. Pierwsza obejmuje model przetwornicy częstotliwości i stojana silnika elektrycznego oraz układ regulacji prędkości, druga - układ regulacji przemieszczenia. Zaznaczony na rysunku model mechanizmu jazdy został omówiony w jednym z następujących rozdziałów.





Rys. 6.1. Struktura układu sterowania mechanizmu jazdy czołownicy.



Rys. 6.2. Model układu sterowania.

Wielkością wejściową dla zespołu falownika jest sygnał napięciowy  $U_z$ , który po ograniczeniu do wartości  $U_m$  przechodzi przez zadajnik całkujący i w postaci sygnału  $U_s$  generuje moment napędowy silnika elektrycznego  $M_s$ . Zadaniem zadajnika całkującego jest ograniczenie prędkości zmian napięcia do wymaganego poziomu. Sygnał napięciowy jest następnie porównywany z sygnałem sprzężenia zwrotnego

proporcjonalnym do prędkości kątowej  $\omega$  silnika elektrycznego. Z kolei prędkość  $\omega$  jest jedną ze zmiennych stanu w modelu mechanizmu jazdy.

Wielkością wejściową dla całego układu sterowania jest sygnał napięciowy  $U$ , który, jak już wspomniano, jest korygowany o wielkość  $\Delta U$ , wypracowaną przez proporcjonalny regulator przemieszczenia stosownie do uchybu między przemieszczeniem zadany  $s_z$  i rzeczywistym  $s_r$  czołownicy. Skorygowany sygnał  $U_z$  ( $U_z = U + \Delta U$ ) podawany jest na wejście falownika. Przemieszczenie rzeczywiste czołownicy obliczane

jest jako całka z jej prędkości  $\left( s_r = \int_0^t v \cdot dt \right)$ .

Określone zostały następujące parametry układu sterowania:

- $U_m$  - maksymalna wartość napięcia sterującego,
- $k_c$  - stała zadajnika całkującego,
- $k_r$  - współczynnik wzmocnienia regulatora prędkości,
- $T_r$  - stała czasowa regulatora prędkości,
- $T_z$  - stała czasowa falownika,
- $k_\omega$  - współczynnik skalujący dla prędkości,
- $k_z$  - współczynnik skalujący dla przemieszczenia,
- $k_s$  - współczynnik wzmocnienia regulatora przemieszczenia.

Wyróżnione zostały następujące zmienne stanu modelu:

- $M_s$  - moment napędowy silnika elektrycznego,
- $M$  - fikcyjny moment pomocniczy,
- $U_s$  - napięcie wyjściowe z zadajnika całkującego,
- $\varepsilon_s$  - uchyb przemieszczenia,
- $\omega$  - prędkość kątowa silnika elektrycznego,
- $v$  - prędkość czołownicy.

Ostatnie dwie zmienne stanu ( $\omega$ ,  $v$ ) są związane z modelem mechanizmu jazdy czołownicy.

Wielkością sterującą jest proporcjonalny do prędkości kątowej silnika elektrycznego sygnał napięciowy  $U$ .

W opisie matematycznym modelu wykorzystano znane zależności automatyki w odniesieniu do członów pokazanych na rys. 6.2 oraz zależności kinematyczne.

Równania przetwornicy częstotliwości wraz z układem regulacji prędkości mają postać (6.1).

$$\begin{aligned} T_r \cdot \frac{dM}{dt} &= k_r \cdot (U_s - k_\omega \cdot \omega) \\ T_z \cdot \frac{dM_s}{dt} &= M - M_s + k_r \cdot (U_s - k_\omega \cdot \omega) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Równanie zadajnika całkującego ma postać (6.2).

$$\begin{aligned} \frac{dU_s}{dt} &= k_c^l \quad k_c^l = k_c \cdot \text{sign}(U_z - U_s) \\ k_c > 0 \quad k_c &= \text{const} \quad |U_z| \leq U_m \end{aligned} \quad (6.2)$$

Układ regulacji przemieszczenia opisany został zależnościami (6.3).

$$\frac{d\varepsilon_s}{dt} = k_z \cdot U - v \quad U_z = U + k_s \cdot \varepsilon_s \quad (6.3)$$

Po uporządkowaniu zależności (6.1) ÷ (6.3) i wyrugowaniu zmiennej  $U_z$  otrzymuje się opis matematyczny modelu układu sterowania mechanizmem jazdy w przestrzeni zmiennych stanu w postaci (6.4).

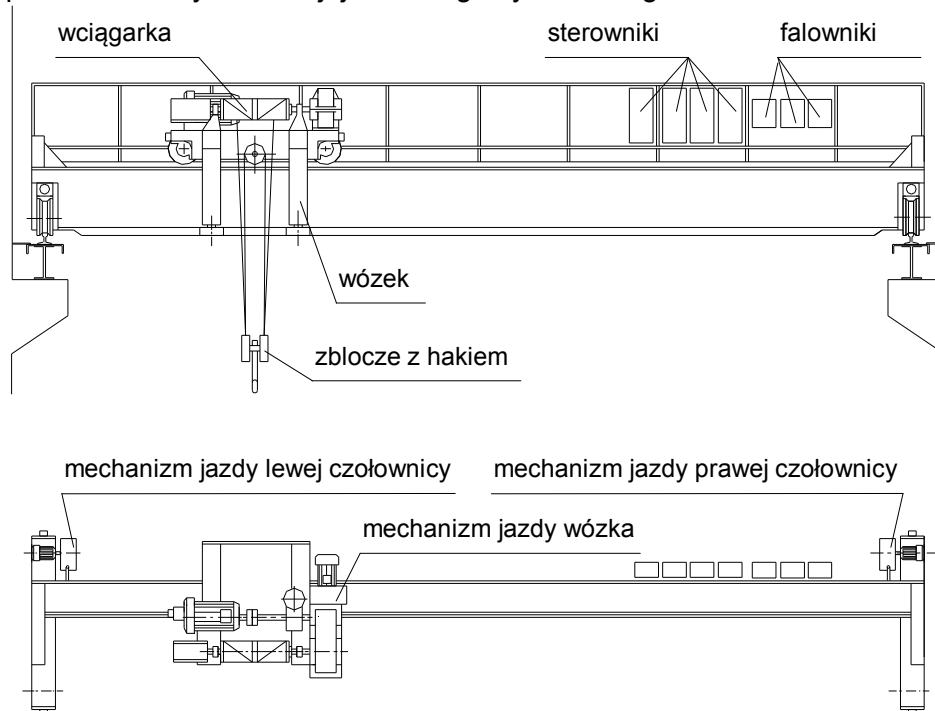
$$\begin{aligned} \frac{dM_s}{dt} &= \frac{1}{T_z} \cdot (M - M_s) + \frac{k_r}{T_z} \cdot (U_s - k_\omega \cdot \omega) \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{k_r}{T_r} \cdot (U_s - k_\omega \cdot \omega) \\ \frac{dU_s}{dt} &= k_c^l \quad k_c^l = k_c \cdot \text{sign}(U + k_s \cdot \varepsilon_s - U_s) \quad |U + k_s \cdot \varepsilon_s| \leq U_m \\ \frac{d\varepsilon_s}{dt} &= k_z \cdot U - v \end{aligned} \quad (6.4)$$

Między współczynnikami  $k_\omega$  i  $k_z$  istnieje związek ( $k_z \cdot k_\omega = R_z$ , gdzie  $R_z$  jest promieniem zastępczym mechanizmu).

Przedstawiony powyżej układ sterowania mechanizmem jazdy oraz jego model został poddany szczegółowej analizie, badaniom eksperymentalnym, symulacyjnym i weryfikacyjnym. Ich wyniki, zamieszczone w pracach [53] i [54], potwierdziły prawidłową pracę układu rzeczywistego oraz przydatność modelu do dalszych badań optymalizacyjnych.

## 6.2. Stanowisko do badań eksperymentalnych mechanizmu jazdy mostu suwnicy.

Do badań eksperymentalnych wykorzystano suwnicę jednodźwigarową o udźwigu  $Q = 50 \text{ kN}$ , rozpiętości  $L = 10 \text{ m}$  i prędkości podnoszenia  $v_p = 10 \text{ m/min}$  umieszczoną w hali w laboratorium Zakładu Maszyn Roboczych i Napędów Hydraulicznych PŁ. Schemat suwnicy pokazano na rys. 6.3, a jej widok ogólny - na fotografiach 6.1 i 6.2.



Rys. 6.3. Schemat suwnicy eksperymentalnej.

Wyniki przeprowadzonych badań symulacyjnych oraz wcześniejsze doświadczenia Zespołu MRiNH umożliwiły opracowanie założeń i wykonanie układu sterowania dla wszystkich mechanizmów prezentowanej suwnicy pomostowej.

Do napędu wszystkich mechanizmów suwnicy zastosowane zostały układy: falownik - silnik asynchroniczny zwarty.



Fot. 6.1. Widok suwnicy eksperymentalnej.



Fot. 6.2. Widok suwnicy eksperymentalnej.

Suwnica wyposażona jest w indywidualne mechanizmy jazdy mostu zainstalowane na czołownicach. Każdy mechanizm składa się z silnika asynchronicznego zwartego o mocy znamionowej  $N_{zn} = 1,1$  kW i obrotach znamionowych  $n_{zn} = 1410$  obr/min, współpracującego z falownikiem typu ING 3 43P7 firmy BEVI i napędzającego poprzez sprzęgło i reduktor o przełożeniu  $i_r = 41$  koło napędowe o średnicy  $D_k = 0,315$  m (prędkość jazdy mostu  $v_m = 34$  m/min).

Mechanizm jazdy wózka składa się z silnika asynchronicznego zwartego o mocy znamionowej  $N_{zn} = 1,5$  kW i obrotach znamionowych  $n_{zn} = 1420$  obr/min, współpracującego z falownikiem typu ING 3 43P7 firmy BEVI i napędzającego poprzez sprzęgło i reduktor o przełożeniu  $i_r = 31,6$  koło napędowe o średnicy  $D_k = 0,250$  m (prędkość jazdy wózka  $v_w = 34$  m/min).

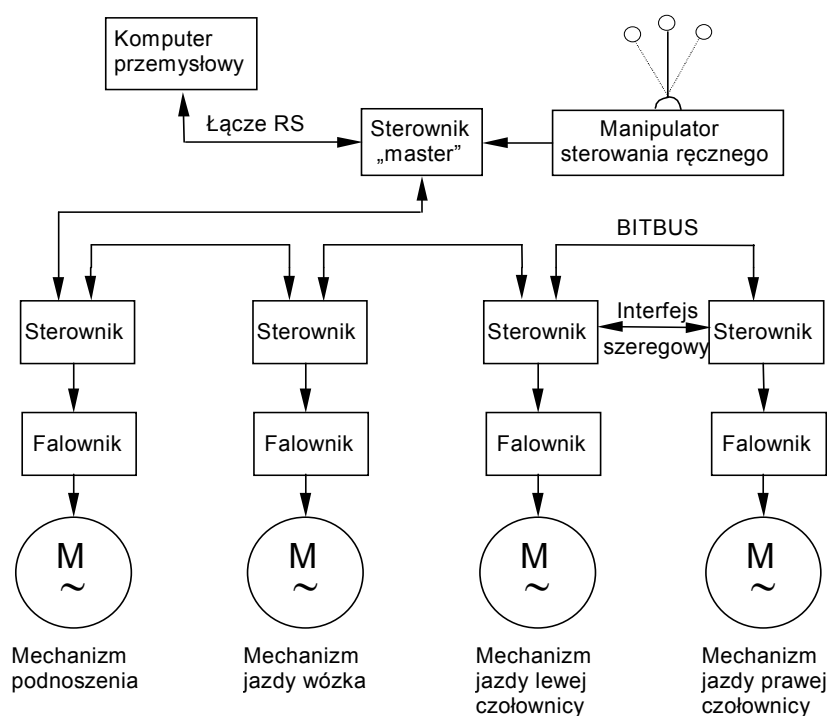
Pracą każdego falownika zarządza sterownik mikroprocesorowy, który realizuje wszystkie wymagane funkcje układu sterownia i regulacji danego mechanizmu. Ponadto sterowniki odpowiedzialne są za zarządzanie wszystkimi funkcjami logicznymi mechanizmów, jak np. sterowanie hamulcami mechanicznymi, czy wyłącznikami krańcowymi. Pracą wszystkich mikrosterowników zarządza sterownik nadrzędny typu „master”, który za pośrednictwem sieci „BITBUS” umożliwia komunikację między mikrosterownikami oraz manipulatorem sterowania ręcznego.

Dodatkowo mikrosterowniki współpracujące z mechanizmami jazdy obydwu czołownic komunikują się między sobą za pomocą interfejsu szeregowego z uwagi na konieczność kompensacji ukosowania mostu suwnicy. Wszystkie mikrosterowniki robocze oraz „master”, jak również manipulator sterowania ręcznego zostały wykonane oraz oprogramowane przez Ośrodek Badawczo - Rozwojowy Dźwignic i Urządzeń Transportowych „DETRANS” w Bytomiu. Schemat blokowy układu sterowania suwnicą pokazano na rys. 6.4.

Układ posiada możliwość pracy w trybie sterowania ręcznego oraz programowego. Wybór trybu sterowania realizowany jest za pomocą przełącznika umieszczonego w manipulatorze sterowania ręcznego.

Ustawienie przełącznika w trybie sterownia ręcznego umożliwia sterowanie ruchami wszystkich mechanizmów suwnicy za pomocą potencjometrów dźwigniowych umieszczonych w manipulatorze, przy czym prędkości poszczególnych mechanizmów są proporcjonalne do wychyleń odpowiednich dźwigni. Przy sterowaniu ręcznym zaangażowane są wszystkie mikrosterowniki robocze oraz „master”, dzięki czemu zabezpieczone jest działanie wszystkich funkcji logicznych

suwnicy i dodatkowo istnieje możliwość kompensacji ukosowania mostu poprzez synchronizację biegu obydwu czołownic.



Rys. 6.4. Schemat blokowy układu sterowania suwnicą.

Ustawienie przełącznika w trybie sterowania programowego pozwala na ruch wszystkich mechanizmów suwnicy według z góry założonych programów. Wymaga to współpracy mikrosterowników z komputerem przemysłowym, który wypracowuje funkcje sterujące.

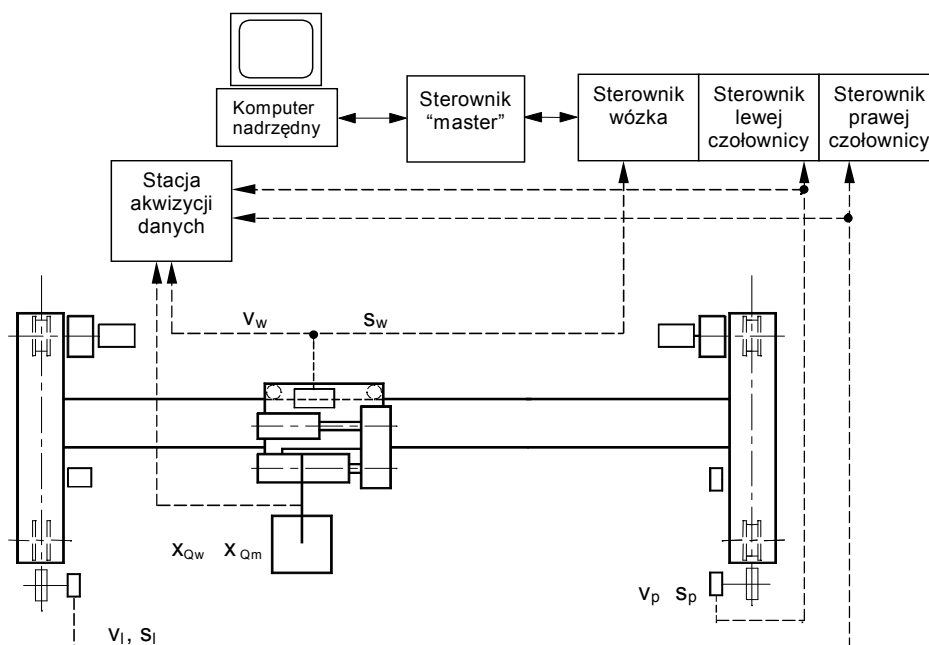
Mechanizm podnoszenia zaopatrzone jest w układy regulacji stałej mocy oraz regulacji położenia. Do mikrosterownika przekazane zostają informacje o zadanym położeniu kątowym bębna linowego oraz o masie podnoszonego ładunku. Ruch roboczy mechanizmu podnoszenia obejmujący rozruch, ruch ustalony i dojazd do zadanego położenia realizowany jest bezpośrednio przez mikrosterownik.

W przypadku mechanizmów jazdy wózka i mostu cały ruch roboczy musi być prowadzony według kryteriów eliminacji wahań ładunku i

uzyskania odpowiedniej dokładności pozycjonowania. Wymaga to określenia przebiegu czasowego prędkości zadanej mechanizmowi w całym ruchu roboczym. Funkcje sterujące w postaci tablic, których elementy odpowiadają wartościom prędkości zadanej w określonych przedziałach czasowych, zostają wypracowane w pamięci komputera przemysłowego, a następnie są przesyłane do odpowiedniego mikrosterownika.

Uruchomienie mechanizmu w trybie sterowania programowego zrealizowane zostaje przyciskiem „start sterownika” po dokonaniu transmisji funkcji sterujących z komputera przemysłowego.

Mechanizmy jazdy mostu i wózka suwnicy zaopatrzone zostały w układ pomiarowy, którego schemat pokazano na rys. 6.5.



Rys. 6.5. Schemat układu pomiarowego.

Układ umożliwia między innymi pomiar i rejestrację przebiegów czasowych następujących wielkości:

- położenia lewej i prawej czołownicy na torze,
- prędkości lewej i prawej czołownicy,



- prędkości wózka względem mostu i położenia wózka na moście,
- masy podnoszonego ładunku,
- długości lin ładunku,
- wahań ładunku.

Pomiar położenia czołownic na torze realizowany jest za pośrednictwem czujników obrotowo - impulsowych związanych z kołami nie napędzanymi. Sygnał pomiarowy położenia jest korygowany w kilku wybranych miejscach na torze, gdzie umieszczono elektromagnetyczne czujniki korekcyjne.

Pomiar prędkości czołownic odbywa się za pomocą tych samych czujników obrotowo - impulsowych. Sygnał pomiarowy prędkości rzeczywistej czołownic jest wykorzystany w układzie regulacji położenia dla określenia (przez całkowanie) ich przemieszczeń rzeczywistych  $s_z$ .

Pomiar położenia i prędkości wózka odbywa się w sposób analogiczny.

Pomiaru masy podnoszonego ładunku dokonuje się za pomocą układu tensometrów umieszczonych na ramie wózka w pobliżu krążka wyrównawczego.

Długość lin, na których zawieszony jest ładunek, określana jest za pomocą optoelektronicznego przetwornika obrotowo - kodowego związanego z bębniem linowym wciągarki.

Wszystkie sygnały pomiarowe przetwarzane są przez stację akwizycji danych 500 A firmy Keithley współpracującą z komputerem przemysłowym.

Procedura dojazdu mostu do zadanego położenia realizowana jest w następujący sposób. Przyjęto, że ładunek lub pusty hak jest podniesiony na znaną wysokość transportową.

- a) Operator lub komputer nadrzędny podaje do komputera przemysłowego informację o nowym położeniu mostu suwnicy,
- b) Do komputera nadrzędnego poprzez mikrosterownik przekazane zostają następujące informacje:
  - położenie zadane mostu,
  - aktualne położenie lewej i prawej czołownicy,
  - masa ładunku,
  - długość lin ładunku.
- c) Na podstawie przekazanych informacji komputer przemysłowy określa położenie początkowe środka mostu i wypracowuje optymalną funkcję sterującą, tak aby obie czołownice, a zatem i środek mostu zrealizowały przemieszczenie zadane odpowiadające

położeniu końcowemu. Funkcja sterująca, jednakowa dla obu czołownic, przesyłana jest w postaci tablic do odpowiednich mikrosterowników. Różnice między położeniem początkowym czołownic oraz środkiem mostu wprowadzane są jako wartości początkowe przemieszczenia rzeczywistego do układów sterowania mechanizmami jazdy czołownic. Charakter wypracowanych funkcji sterujących umożliwia:

- wytłumienie wahań ładunku po okresach rozruchu i hamowania,
- dojazd obydwu czołownic do zadanego położenia,
- likwidację ukosowania mostu suwnicy na początku ruchu roboczego.

d) Przyciskiem „start sterownika” rozpoczyna się realizację ruchu roboczego mechanizmu jazdy mostu w trybie sterowania automatycznego. Mikrosterownik podaje funkcję sterującą w czasie rzeczywistym do obydwu układów sterowania mechanizmami jazdy czołownic.

Procedura dojazdu wózka do zadanego położenia na moście jest analogiczna.

Istnieje również możliwość kompensacji ukosowania mostu w trybie sterowania ręcznego. Funkcja sterująca, proporcjonalna do prędkości zadanej mostu, podawana jest bezpośrednio przez operatora z kasy sterowania ręcznego do obydwu układów sterowania. Układy regulacji położenia muszą być włączone, a różnice między położeniem początkowym czołownic i środka mostu wprowadzone jako wartości początkowe przemieszczenia rzeczywistego. Ponieważ układy regulacji przemieszczenia działają w sposób ciągły, to początkowe uchyby położenia obu czołownic są kompensowane już w początkowej fazie ruchu roboczego i ich bieg zostaje zsynchronizowany.

### **6.3. Model dynamiczny mechanizmu jazdy mostu suwnicy.**

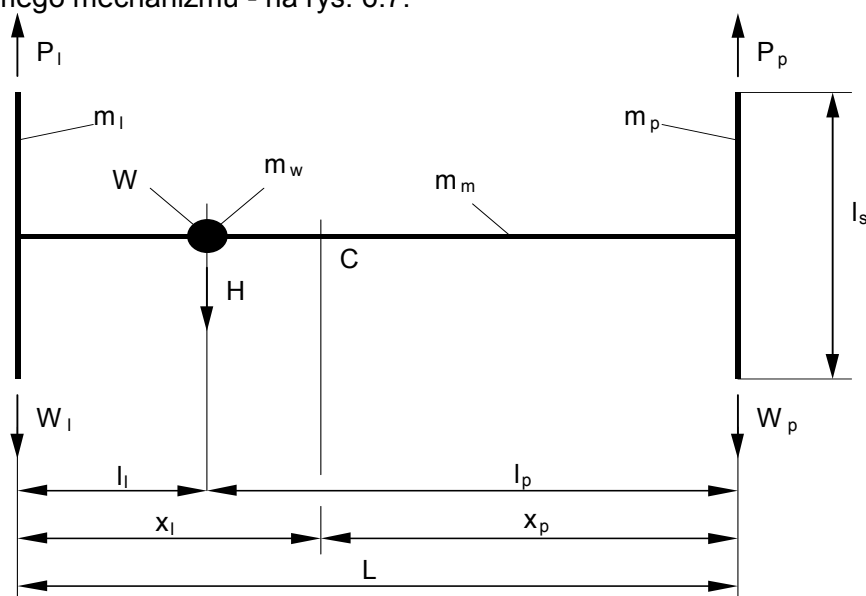
Struktura modelu dynamicznego mechanizmów jazdy mostu badanej suwnicy eksperymentalnej została opracowana w oparciu o doświadczenia Zakładu MRiNH opisane w pracach [35], [53]. Parametry modelu zostały określone w oparciu o dokumentację techniczną, dane katalogowe i własne badania eksperymentalne.

Przy budowie modelu przyjęto następujące założenia i uwzględniono następujące cechy układu:

- most suwnicy potraktowano jako ciało sztywne,

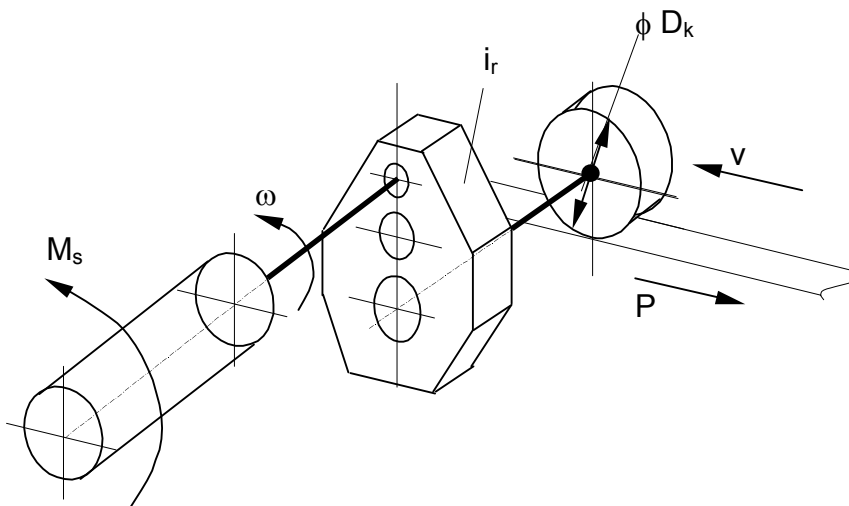
- uwzględniono ruch płaski mostu w płaszczyźnie poziomej,
- kąty zukosowania mostu potraktowano jako małe,
- prędkości kątowe mostu potraktowano jako małe,
- prędkości i przyspieszenia elementów mostu są równoległe do toru jezdni,
- opory ruchu czołownic są proporcjonalne do ich obciążenia pionowego i zmieniają się wraz z położeniem wózka na moście,
- nie uwzględniono tarcia obrzeży,
- pominięto straty w reduktorach.

Schemat modelu dynamicznego mostu przedstawiono na rys. 6.6, a samego mechanizmu - na rys. 6.7.



Rys. 6.6. Model dynamiczny mostu suwnicy.

W opisie matematycznym wykorzystano powszechnie znane zasady mechaniki: zależności statyczne, kinematyczne i dynamiczne. Opisany został przypadek ruchu roboczego mechanizmu jazdy mostu z położenia początkowego do końcowego przy stałym położeniu wózka na moście i przy stałym poziomie transportowym ładunku.



Rys. 6.7. Model dynamiczny mechanizmu jazdy czołownicy.

Określone zostały następujące parametry modelu:

- |   |  |
|---|--|
| $m_{cl} = 500 \text{ kg}$               | - masa lewej czołownicy,   |
| $m_{cp} = 650 \text{ kg}$               | - masa prawej czołownicy,  |
| $m_m = 2600 \text{ kg}$                 | - masa dźwigara,   |
| $m_w = 1600 \text{ kg}$                 | - masa wózka,  |
| $m_Q = 5000 \text{ kg}$                 | - masa podnoszonego ładunku,   |
| $L = 10 \text{ m}$                      | - rozpiętość mostu suwnicy,  |
| $l_c = 2,1 \text{ m}$                   | - długość czołownicy,  |
| $w = 0,0756$                            | - współczynnik oporów ruchu czołownicy,  |
| $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  | - przyspieszenie ziemskie,   |
| $R_z = 0,00384 \text{ m}$               | - promień zastępczy mechanizmu   |
|   | $\left( R_z = \frac{D_k}{2 \cdot i_r} \right),$                                    |
| $I = 0,018 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ | - zredukowany do wału silnika moment bezwładności elementów obrotowych mechanizmu. |

Wyróżnione zostały następujące zmienne stanu modelu:

- $\omega_l$  - prędkość kątowna silnika lewej czołownicy,
- $\omega_p$  - prędkość kątowna silnika prawej czołownicy,
- $v_l$  - prędkość lewej czołownicy,
- $v_p$  - prędkość prawej czołownicy.

Wielkościami sterującymi są momenty napędowe silników lewej i prawej czołownicy  $M_{sl}$  i  $M_{sp}$ .

Przy określaniu parametrów dynamicznych suwnicy przyjęto uproszczenie, że most posiada oś symetrii przebiegającą wzdłuż dźwigara. Zastosowano oznaczenia z rys. 6.6.

Masę całkowitą mostu suwnicy określa zależność (6.5).

$$m_s = m_{cl} + m_{cp} + m_m + m_w \quad (6.5)$$

Położenie środka ciężkości mostu określa zależność (6.6).

$$x_l = \frac{(m_{cp} + 0,5 \cdot m_m) \cdot L + m_w \cdot l_l}{m_s} \quad x_p = L - x_l \quad (6.6)$$

Moment bezwładności mostu suwnicy względem jego środka ciężkości opisany jest związkami (6.7).

$$I_s = \frac{1}{12} \cdot m_m \cdot L^2 + m_m \cdot \left(\frac{L}{2} - x_l\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot (m_{cl} + m_{cp}) \cdot l_c^2 + m_{cl} \cdot x_l^2 + m_{cp} \cdot x_p^2 + m_w \cdot (x_l - l_l)^2 \quad (6.7)$$

Równanie ruchu oraz związki kinematyczne dla mechanizmu jazdy czołownicy (rys. 6.7) opisuje zależność (6.8). Równania są słuszne dla obydwu czołownic, dlatego w opisie uwzględniono jednocześnie lewą i prawą czołownicę (odpowiednio indeksy „l” i „(p)”).

$$I \cdot \frac{d\omega_{l(p)}}{dt} = M_{sl(p)} - M_{ol(p)} \quad M_{ol(p)} = P_{l(p)} \cdot R_z \quad (6.8)$$

$P_{l(p)}$  - pozioma siła sprzężenia ciernego między kołem napędowym i szyną,

$M_{ol(p)}$  - moment od siły  $P_{l(p)}$  zredukowany do wału silnika elektrycznego.

W przypadku braku poślizgu między kołem napędowym i szyną, gdy spełniony jest warunek  $P_{l(p)} \leq \mu \cdot G_{nl(p)}$  ( $\mu$  - współczynnik tarcia między kołem napędowym i szyną,  $G_{nl(p)}$  - reakcja pionowa między kołem napędowym i szyną), między prędkością kątowną silnika elektrycznego  $\omega_{l(p)}$  i prędkością  $v_{l(p)}$  czołownicy oraz odpowiednimi przyspieszeniami istnieje ścisły związek (6.9).

$$\omega_{l(p)} = \frac{1}{R_z} \cdot v_{l(p)} \quad \frac{d\omega_{l(p)}}{dt} = \frac{1}{R_z} \cdot \frac{dv_{l(p)}}{dt} \quad (6.9)$$

W przypadku wystąpienia poślizgu zależność (6.9) nie obowiązuje, a siła sprzężenia ciernego  $P_{l(p)}$  jest równa sile tarcia rozwiniętego  $\mu \cdot G_{nl(p)}$ . Zaprezentowany poniżej model matematyczny nie opisuje zjawiska poślizgu, co jest uzasadnione, ponieważ w badaniach stosowane są takie funkcje sterujące, które nie powodują zerwania sprzężenia ciernego między kołem napędowym i szyną. Model uwzględniający poślizgi został opracowany również, jednak nie jest prezentowany w niniejszej pracy.

Wykorzystując związki (6.8) i (6.9) można wyznaczyć zależność określającą siłę poziomą  $P_{l(p)}$  rozwijaną między kołem napędowym i szyną.

$$P_{l(p)} = \frac{1}{R_z} \cdot M_{sl(p)} - \frac{I}{R_z^2} \cdot \frac{dv_{l(p)}}{dt} \quad (6.10)$$

Równanie ruchu środka masy mostu ma postać (6.11).

$$m_s \cdot \frac{dv_s}{dt} = P_l + P_p - H - W_l - W_p \quad (6.11)$$

$v_s$  - prędkość środka masy mostu,

$W_{l(p)}$  =  $w \cdot G_{l(p)}$  - opory ruchu lewej (prawej) czołownicy,

$G_l = \left( m_{cl} + \frac{1}{2} \cdot m_m + \frac{L-l_l}{L} \cdot (m_w + m_Q) \right) \cdot g$  - suma reakcji pionowych  
kół lewej czołownicy,

$G_p = \left( m_{cp} + \frac{1}{2} \cdot m_m + \frac{L-l_p}{L} \cdot (m_w + m_Q) \right) \cdot g$  - suma reakcji pionowych  
kół prawej czołownicy,

$H$  - siła pozioma równoległa do toru mostu, wywołana odchyleniem ładunku od położenia pionowego.

Równanie ruchu obrotowego mostu wokół środka masy ma postać (6.12).

$$I_s \cdot \frac{d\omega_s}{dt} = -P_l \cdot x_l + P_p \cdot x_p + H \cdot (x_l - l_l) + W_l \cdot x_l - W_p \cdot x_p \quad (6.12)$$

Wykorzystując w związkach (6.11) i (6.12) zależności (6.10) otrzymuje się równania ruchu mostu suwnicy w płaszczyźnie poziomej.

$$\begin{aligned} \frac{dv_s}{dt} &= \frac{1}{m_s \cdot R_z} \cdot (M_{sl} + M_{sp}) - \frac{l}{m_s \cdot R_z^2} \cdot \left( \frac{dv_l}{dt} + \frac{dv_p}{dt} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{m_s} \cdot H - \frac{1}{m_s} \cdot (W_l + W_p) \\ \frac{d\omega_s}{dt} &= -\frac{x_l}{I_s \cdot R_z} \cdot M_{sl} + \frac{l \cdot x_l}{I_s \cdot R_z^2} \cdot \frac{dv_l}{dt} + \frac{x_p}{I_s \cdot R_z} \cdot M_{sp} - \\ &\quad - \frac{l \cdot x_p}{I_s \cdot R_z^2} \cdot \frac{dv_p}{dt} + \frac{x_l - l}{I_s} \cdot H + \frac{x_l}{I_s} \cdot W_l - \frac{x_p}{I_s} \cdot W_p \end{aligned} \quad (6.13)$$

Jako zmienne stanu wybrano prędkości lewej i prawej czołownicy, odpowiednio  $v_l$  i  $v_p$ . Wykorzystując założenia i zasady ruchu płaskiego można prędkości  $v_l$  i  $v_p$  oraz ich pochodne uzależnić od prędkości środka masy mostu  $v_s$  i jego prędkości kątowej  $\omega_s$  oraz ich pochodnych.

$$\begin{aligned} v_l &= v_s - x_l \cdot \omega_s & \frac{dv_l}{dt} &= \frac{dv_s}{dt} - x_l \cdot \frac{d\omega_s}{dt} \\ v_p &= v_s + x_p \cdot \omega_s & \frac{dv_p}{dt} &= \frac{dv_s}{dt} + x_p \cdot \frac{d\omega_s}{dt} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Podstawiając zależności (6.13) do (6.14) i eliminując wielkości  $v_s$  i  $\omega_s$  otrzymuje się układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi  $\frac{dv_l}{dt}$  i  $\frac{dv_p}{dt}$ .

$$\begin{aligned}
 & \left[ 1 + \frac{l}{m_s \cdot R_z^2} + \frac{l \cdot x_l^2}{l_s \cdot R_z^2} \right] \cdot \frac{dv_l}{dt} + \left[ \frac{l}{m_s \cdot R_z^2} - \frac{l \cdot x_l \cdot x_p}{l_s \cdot R_z^2} \right] \cdot \frac{dv_p}{dt} = \\
 & = \frac{1}{m_s \cdot R_z} \cdot (M_{sl} + M_{sp}) + \frac{x_l^2}{l_s \cdot R_z} \cdot M_{sl} - \frac{x_l \cdot x_p}{l_s \cdot R_z} \cdot M_{sp} - \frac{1}{m_s} \cdot H - \\
 & - \frac{x_l \cdot (x_l - l_l)}{l_s} \cdot H - \frac{1}{m_s} \cdot (W_l + W_p) - \frac{x_l^2}{l_s} \cdot W_l + \frac{x_l \cdot x_p}{l_s} \cdot W_p \\
 & \left[ \frac{l}{m_s \cdot R_z^2} - \frac{l \cdot x_l \cdot x_p}{l_s \cdot R_z^2} \right] \cdot \frac{dv_l}{dt} + \left[ 1 + \frac{l}{m_s \cdot R_z^2} - \frac{l \cdot x_p^2}{l_s \cdot R_z^2} \right] \cdot \frac{dv_p}{dt} =
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{1}{m_s \cdot R_z} \cdot (M_{sl} + M_{sp}) - \frac{x_l \cdot x_p}{l_s \cdot R_z} \cdot M_{sl} + \frac{x_p^2}{l_s \cdot R_z} \cdot M_{sp} - \\
 & - \frac{1}{m_s} \cdot H + \frac{x_p \cdot (x_l - l_l)}{l_s} \cdot H - \frac{1}{m_s} \cdot (W_l + W_p) + \frac{x_l \cdot x_p}{l_s} \cdot W_l + \frac{x_p^2}{l_s} \cdot W_p
 \end{aligned}$$

Wyznacznik charakterystyczny układu ma postać (6.16).

$$W = 1 + 2 \cdot \frac{l}{m_s \cdot R_z^2} + \frac{l^2 \cdot L^2}{m_s \cdot l_s \cdot R_z^4} + \frac{l \cdot (x_l^2 + x_p^2)}{l_s \cdot R_z^2} \tag{6.16}$$

Po obliczeniu wyznaczników odpowiadających i ich podzieleniu przez wyznacznik charakterystyczny otrzymuje się wyrażenia na pochodne prędkości czołownic.



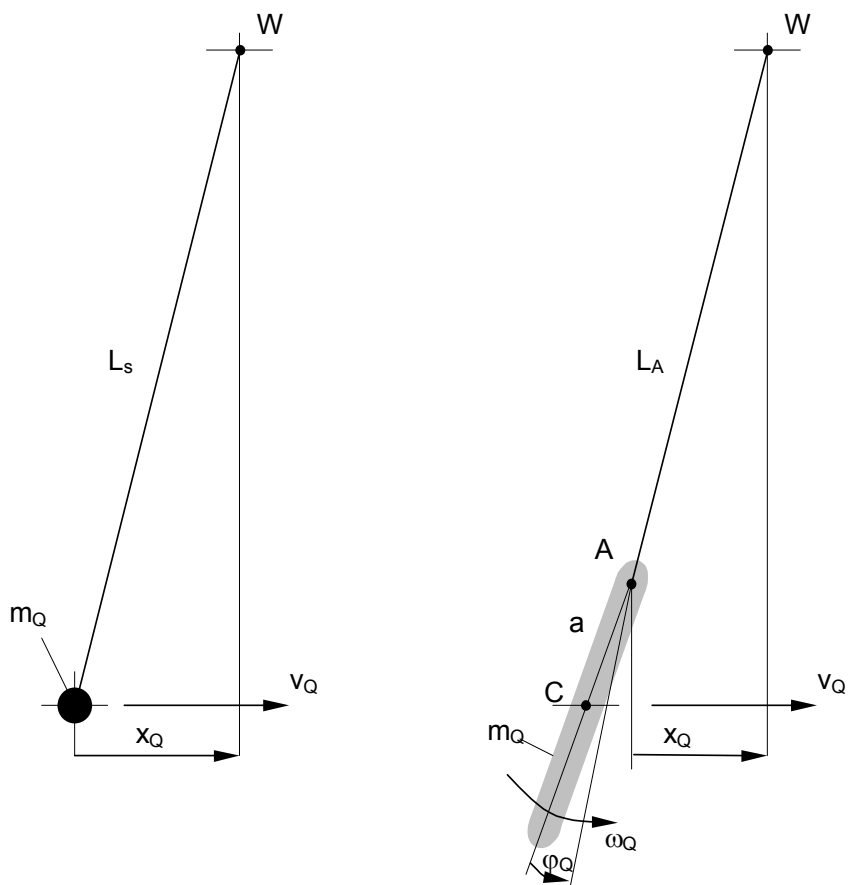
$$\begin{aligned}
 \frac{dv_l}{dt} = & \left[ \frac{1}{m_s} + \frac{x_l^2}{I_s} + \frac{I \cdot L^2}{m_s \cdot I_s \cdot R_z^2} \right] \cdot \frac{1}{W \cdot R_z} \cdot M_{sl} + \\
 & + \left[ \frac{1}{m_s} - \frac{x_l \cdot x_p}{I_s} \right] \cdot \frac{1}{W \cdot R_z} \cdot M_{sp} - \\
 & - \left[ \frac{1}{m_s} + \frac{x_l \cdot (x_l - l_l)}{I_s} + \frac{I \cdot L \cdot l_p}{m_s \cdot I_s \cdot R_z^2} \right] \cdot \frac{1}{W} \cdot H - \\
 & - \frac{1}{W \cdot m_s} \cdot (W_l + W_p) - \frac{x_l^2}{W \cdot I_s} \cdot W_l + \frac{x_l \cdot x_p}{W \cdot I_s} \cdot W_p - \\
 & - \frac{I \cdot L^2}{W \cdot m_s \cdot I_s \cdot R_z^2} \cdot W_l \\
 \\
 \frac{dv_p}{dt} = & \left[ \frac{1}{m_s} - \frac{x_l \cdot x_p}{I_s} \right] \cdot \frac{1}{W \cdot R_z} \cdot M_{sl} + \\
 & + \left[ \frac{1}{m_s} + \frac{x_p^2}{I_s} + \frac{I \cdot L^2}{m_s \cdot I_s \cdot R_z^2} \right] \cdot \frac{1}{W \cdot R_z} \cdot M_{sp} - \\
 & - \left[ \frac{1}{m_s} + \frac{x_l \cdot (x_p - l_p)}{I_s} + \frac{I \cdot L \cdot l_l}{m_s \cdot I_s \cdot R_z^2} \right] \cdot \frac{1}{W} \cdot H - \\
 & - \frac{1}{W \cdot m_s} \cdot (W_l + W_p) + \frac{x_l \cdot x_p}{W \cdot I_s} \cdot W_l - \frac{x_p^2}{W \cdot I_s} \cdot W_p - \\
 & - \frac{I \cdot L^2}{W \cdot m_s \cdot I_s \cdot R_z^2} \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Dla potrzeb regulacji położenia niezbędna jest znajomość rzeczywistego przemieszczenia lewej i prawej czołownicy, odpowiednio  $s_{rl}$  i  $s_{rp}$ . Określają je zależności (6.18).

$$\frac{ds_{rl}}{dt} = v_l \qquad \frac{ds_{rp}}{dt} = v_p \tag{6.18}$$

#### 6.4. Model dynamiczny zawieszony na linach ładunku.

W badaniach optymalizacyjnych przyjęto dwa modele zawieszony na linach ładunku. W pierwszym ładunek potraktowano jako wahadło matematyczne, czyli punkt materialny zawieszony na nierozciągliwym cięgnię. Drugi model zakłada, że ładunek zawieszony na nierozciągliwym cięgnię jest ciałem sztywnym, które wykonuje ruch płaski w płaszczyźnie pionowej równoległej do toru mostu suwnicy. Oba modele pokazano na rys. 6.8.



Rys. 6.8. Modele dynamiczne zawieszony na linach ładunku.

Przyjęte zostały następujące założenia:

- ładunek waha się w płaszczyźnie pionowej równoległej do toru jezdni mostu,
- wahania zawieszono na linach ładunku są małe,
- liny wciągarki są nieważkie i mają stałą długość,
- siła oporu powietrza działająca na ładunek jest proporcjonalna do jego prędkości,
- siła oporu powietrza jest przyłożona w środku ciężkości ładunku,
- nie uwzględniono działania wiatru.

#### 6.4.1. Model ładunku jako wahadła matematycznego.

Model traktujący ładunek jako wahadło matematyczne (rys. 6.8 a) został opisany w rozdziale 5.1. Określone zostały następujące parametry:

$$c_Q = \frac{m_Q \cdot g}{L_s} \text{ - sztywność pozioma zawieszenia ładunku,}$$

$L_s$  - odległość między punktem zaczepienia lin na wózku i środkiem ciężkości ładunku,

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ - przyspieszenie ziemskie,}$$

$$f_Q = 2,1 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \text{ - współczynnik oporu powietrza ładunku.}$$

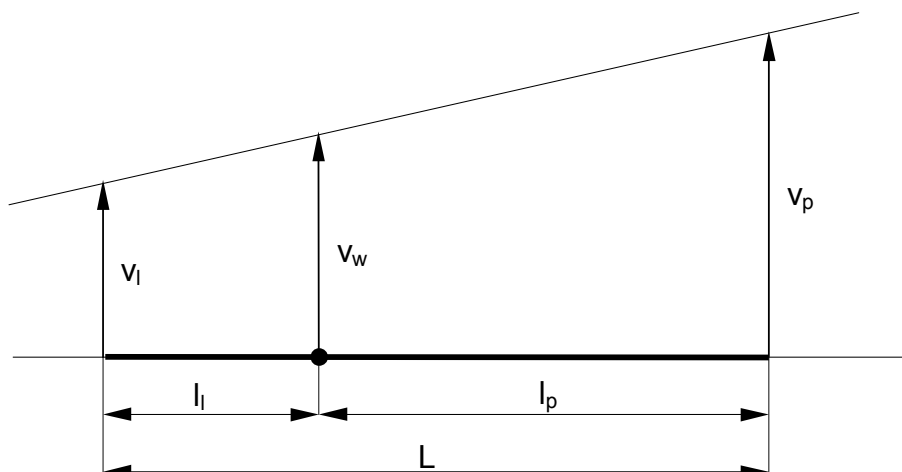
Zmienne stanu opisujące model są następujące:

$v_Q$  - prędkość ładunku w kierunku ruchu mostu,

$x_Q$  - przemieszczenie poziome punktu zawieszenia lin ładunku względem jego środka.

Wielkością sterującą jest prędkość  $v_w$  punktu zawieszenia ładunku w kierunku ruchu mostu. Można ją określić zależnością (6.19) znając prędkości  $v_l$  i  $v_p$  lewej i prawej czołownicy. Wyjaśnia to rys. 6.9.

$$v_w = \frac{v_l \cdot l_p + v_p \cdot l_l}{L} \quad (6.19)$$



Rys. 6.9. Sposób wyznaczenia prędkości  $v_w$ .

Opis matematyczny modelu w przestrzeni zmiennych stanu ma postać (6.20).

$$\frac{dv_Q}{dt} = \frac{f_Q}{m_Q} \cdot v_Q + \frac{c_Q}{m_Q} \cdot x_Q \quad (6.20)$$

$$\frac{dx_Q}{dt} = v_w - v_Q$$

#### 6.4.2. Model uwzględniający ruch płaski ładunku.

Przyjęto, że ładunek jest ciałem sztywnym poruszającym się ruchem płaskim w płaszczyźnie pionowej zawierającej kierunek ruchu mostu (rys. 6.8 b). Określone zostały następujące parametry modelu:

- $L_A$  - długość lin ładunku (odległość od punktu zawieszenia lin na wózku do osi trawersy haka),
- $a$  - odległość od środka ciężkości ładunku do osi trawersy haka,
- $m_Q$  - masa ładunku,
- $I_Q$  - masowy moment bezwładności ładunku względem osi centralnej prostopadłej do płaszczyzny jego ruchu,

$g = 9,81 \frac{m}{s^2}$  - przyspieszenie ziemskie,

$f_Q$  - współczynnik oporu powietrza dla ładunku.

Wybrane zostały następujące zmienne stanu modelu:

$v_Q$  - prędkość środka ciężkości ładunku w kierunku ruchu mostu,

$\omega_Q$  - prędkość kątowna ładunku,

$x_Q$  - przemieszczenie poziome punktu zawieszenia lin ładunku względem osi trawersy haka,

$\varphi_Q$  - kąt położenia ładunku względem osi wychylonych lin.

Wielkością sterującą jest prędkość  $v_w$  punktu zawieszenia ładunku w kierunku ruchu mostu, którą określa zależność (6.18).

Przyjęto założenia upraszczające z rozdziału 5.1 oraz założono małe wartości prędkości kątowej ładunku  $\omega_Q$  i kąta obrotu ładunku względem wychylonych lin  $\varphi_Q$ .

Równanie ruchu środka masy ładunku ma postać (6.21).

$$m_Q \cdot \frac{dv_Q}{dt} = H + R_Q \quad (6.21)$$

$H \cong \frac{m_Q \cdot g}{L_A} \cdot x_Q = c_Q \cdot x_Q$  - składowa pozioma siły w linach,

$R_Q = -f_Q \cdot v_Q$  - siła oporu powietrza dla ładunku.

Równanie ruchu obrotowego ładunku wokół środka masy ma postać (6.22).

$$I_Q \frac{d\omega_Q}{dt} = M_Q \quad (6.22)$$

$M_Q = S_l \cdot a \cdot \sin \varphi_Q \cong m_Q \cdot g \cdot a \cdot \varphi_Q$  - moment sił zewnętrznych względem środka ciężkości ładunku ( $S_l$  – siła w linach).

Zależności kinematyczne między zmiennymi stanu określają związki (6.23).

$$\begin{aligned} \frac{dx_Q}{dt} &= v_w - v_Q + a \cdot \omega_Q \\ \frac{d\varphi_Q}{dt} &= \frac{-v_w + v_Q - (L_A + a) \cdot \omega_Q}{L_A} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Wykorzystując zależności (6.21) ÷ (6.23) można uzyskać opis matematyczny modelu w przestrzeni zmiennych stanu.

$$\begin{aligned} \frac{dv_Q}{dt} &= -\frac{f_Q}{m_Q} \cdot v_Q + \frac{c_Q}{m_Q} \cdot x_Q \\ \frac{d\omega_Q}{dt} &= \frac{m_Q \cdot g \cdot a}{I_Q} \cdot \varphi_Q \\ \frac{dx_Q}{dt} &= -v_Q + a \cdot \omega_Q + v_w \\ \frac{d\varphi_Q}{dt} &= \frac{1}{L_A} \cdot v_Q - \left(1 + \frac{a}{L_A}\right) \cdot \omega_Q - \frac{1}{L_A} \cdot v_w \end{aligned} \quad (6.24)$$

### 6.5. Model dynamiczny mechanizmu jazdy mostu suwnicy wraz z układem sterowania i regulacji położenia.

Wykorzystując opracowane wcześniej modele poszczególnych podukładów zbudowano model dynamiczny całego układu mechanizmu jazdy mostu suwnicy wraz z układem sterowania i regulacji położenia, zawierający model zawieszoności na linach ładunku. Schemat blokowy układu pokazano na rys. 6.10.

Wektor zmiennych stanu  $\mathbf{x}$  posiada następujące składowe:

a) dla modelu ładunku potraktowanego jako wahadło matematyczne:

$$\mathbf{x} = [M_{sl}, M_{sp}, M_l, M_p, U_{sl}, U_{sp}, \varepsilon_{sl}, \varepsilon_{sp}, v_l, v_p, v_Q, x_Q] \quad (6.25)$$

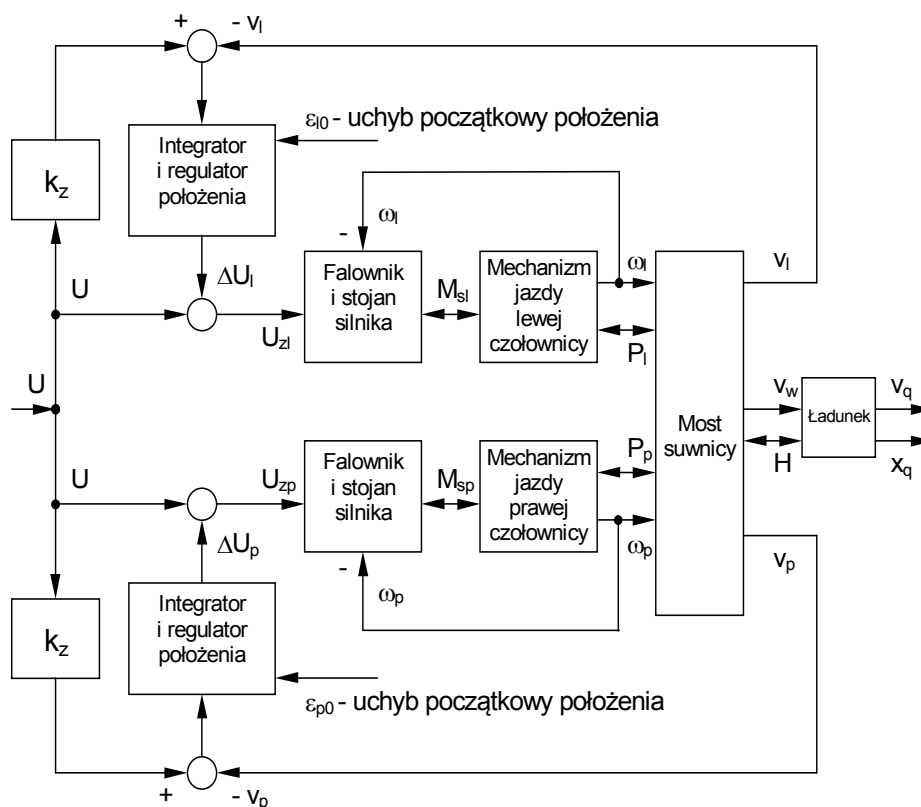
b) dla modelu uwzględniającego ruch płaski ładunku:

$$\mathbf{x} = [M_{sl}, M_{sp}, M_l, M_p, U_{sl}, U_{sp}, \varepsilon_{sl}, \varepsilon_{sp}, v_l, v_p, v_Q, \omega_Q, \varphi_1, \varphi_2] \quad (6.26)$$

Zmienną sterującą stanowi jeden wspólny sygnał napięciowy  $U$ , identyczny dla obu czołownic, podawanych na wejście układów sterowania. Sygnał sterujący  $U$  jest w warunkach ustalonych wprost proporcjonalny do prędkości obydwu czołownic  $v_l$  i  $v_p$ .

$$v_l = v_p = k_z \cdot U \quad (6.27)$$

Zakłócenie stanowią zmienne opory ruchu obydwu czołownic  $W_l$  i  $W_p$ .



Rys. 6.10. Schemat blokowy mechanizmu jazdy mostu suwnicy wraz z układem sterowania i regulacji położenia.

## 6.6. Optymalny przebieg funkcji sterującej w ruchu roboczym.

Jak już wspomniano we wstępie do rozdziału 5, zastosowanie w strukturze mechanizmu jazdy układu regulacji prędkości i przemieszczenia umożliwia ograniczenie poszukiwań sterowania optymalnego do zespołu zawieszony na linach ładunku, gdzie wielkością wejściową jest prędkość  $v_w$  punktu zawieszenia ładunku w kierunku ruchu mostu. Procedura wyznaczania optymalnego przebiegu funkcji sterującej  $v_w(t)$  w ruchu roboczym jest następująca.

- a) Znana jest informacja o zadanym przemieszczeniu ładunku w kierunku ruchu mostu.
- b) Znane jest położenie początkowe obu czołownic na torze, a tym samym położenie punktu zaczepienia ładunku w kierunku ruchu mostu.
- c) Znana jest informacja o parametrach zawieszonoego na linach ładunku oraz długości lin.
- d) Określa się warunki początkowe równowagi odpowiadające spoczynkowi ładunku.
- e) Przy zastosowaniu jednej z metod optymalizacji oraz przyjęciu jednego z modeli zawieszonoego na linach ładunku określany jest optymalny przebieg funkcji sterującej przy rozruchu układu do prędkości ustalonej  $v_u$  w zadanym czasie  $t_r$ .
- f) Określa się przemieszczenie punktu zawieszenia ładunku  $s_r$  odpowiadające rozruchowi układu.
- g) Określa się warunki równowagi odpowiadające ruchowi ustalonemu układu z prędkością  $v_u$  przy nie wahającym się ładunku.
- h) Przy zastosowaniu wybranej metody optymalizacji oraz wybranego modelu zawieszonoego na linach ładunku określany jest optymalny przebieg funkcji sterującej przy hamowaniu układu od prędkości ustalonej  $v_u$  do zera w zadanym czasie  $t_h$ .
- i) Określa się przemieszczenie punktu zawieszenia ładunku  $s_h$  odpowiadające hamowaniu układu.
- j) Określa się czas ruchu ustalonego  $t_u$  z prędkością  $v_u$ , tak aby punkt zawieszenia ładunku przebył w ruchu roboczym zadaną drogę  $s_z$  wg zależności (6.28).

$$t_u = \frac{s_z - s_r - s_h}{v_u} \quad (6.28)$$

Optymalny przebieg funkcji sterującej w okresach ruchu nieustalonego wyznaczono dla dwóch opisanych powyżej modeli zawieszonoego na linach ładunku przy zastosowaniu przyjętej metody optymalizacji. W obu przypadkach przyjęto obszar rozwiązań dopuszczalnych postaci (3.20) i (3.21).

Wykorzystano wskaźniki jakości typu (3.25), które w rozpatrywanym przypadku przyjmują postać (6.29 ÷ 6.32).

Dla modelu ładunku potraktowanego jako wahadło matematyczne wskaźnik odpowiadający za wytlumienie wahań ładunku po okresie rozruchu określony jest wzorem (5.14) powtórzonym poniżej.



$$W = \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot (v_{Qr} - v_u)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_Q \cdot (x_{Qr} - x_u)^2 \quad (6.29)$$

Dla modelu uwzględniającego ruch płaski ładunku analogiczny wskaźnik ma postać (6.30).

$$W = \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot (v_{Qr} - v_u)^2 + \frac{1}{2} \cdot I_Q \cdot \omega_{Qr}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot g \cdot (L_A + a) \cdot \varphi_{1r}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot g \cdot a \cdot \varphi_{2r}^2 \quad (6.30)$$

Symbole z indeksem „r” oznaczają wartości zmiennych stanu na koniec okresu rozruchu.

Dla modelu ładunku potraktowanego jako wahadło matematyczne wskaźnik odpowiadający za wytłumienie wahań po okresie hamowania określony jest wzorem (5.10) powtórzonym poniżej.

$$I = \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot v_{Qk}^2 + \frac{1}{2} \cdot c_Q \cdot x_{Qk}^2 \quad (6.31)$$

Dla modelu uwzględniającego ruch płaski ładunku analogiczny wskaźnik ma postać (6.32).

$$I = \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot v_{Qk}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_Q \cdot \omega_{Qk}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot g \cdot (L_A + a) \cdot \varphi_{1k}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_Q \cdot g \cdot a \cdot \varphi_{2k}^2 \quad (6.32)$$

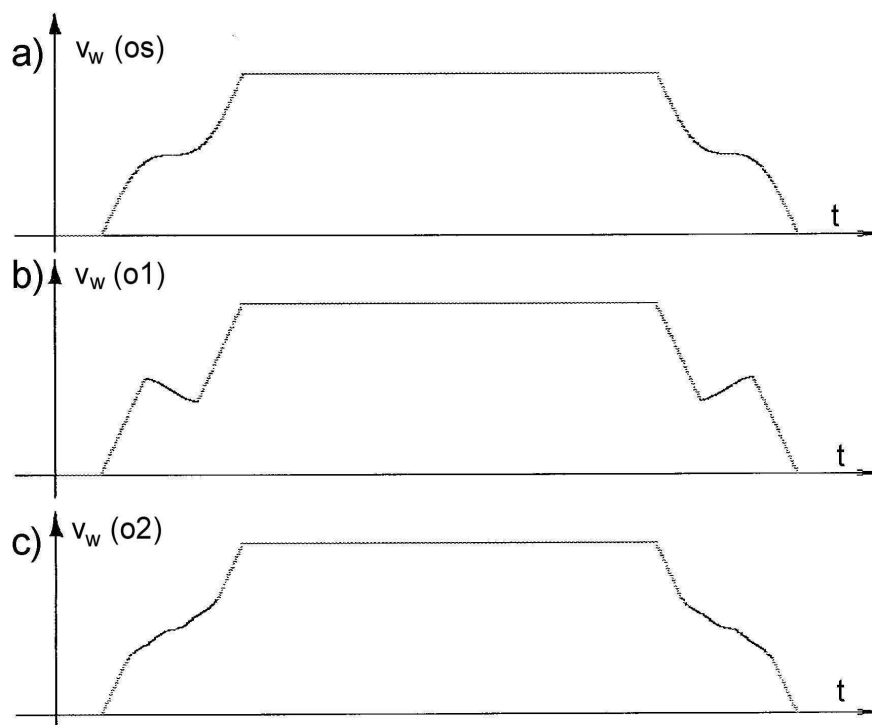
Symbole z indeksem „k” oznaczają wartości zmiennych stanu na koniec okresu hamowania.

Dla modelu ładunku potraktowanego jako wahadło matematyczne można optymalną funkcję sterującą przy rozruchu wyznaczyć w sposób analityczny, jak to opisano w rozdziale 3.5, jako kombinację funkcji liniowej i trygonometrycznej. Badania wykazały, że kształt optymalnej funkcji sterującej przy hamowaniu wykazuje pewien rodzaj symetrii „odwróconej” względem kształtu optymalnej funkcji sterującej przy rozruchu.

Na rys. 6.11 pokazano przykładowe przebiegi sterowań optymalnych w ruchu roboczym wyznaczonych odpowiednio:

- metodą analityczną dla modelu ładunku potraktowanego jako wahadło matematyczne (rys. 6.11 a),
- metodą rzutu gradientu dla modelu ładunku potraktowanego jako wahadło matematyczne (rys. 6.11 b),

- metodą rzutu gradientu dla modelu uwzględniającego ruch płaski ładunku (rys. 6.11 c).



Rys. 6.11. Przykładowe przebiegi funkcji sterującej w ruchu roboczym.

W zależności od zastosowanej metody optymalizacji oraz przyjętego modelu ładunku uzyskuje się różne kształty funkcji sterującej przy rozruchu i hamowaniu. W okresie ruchu ustalonego prędkość punktu zawieszenia ładunku jest stała  $v_w = v_{wu}$ , a czas ruchu ustalonego  $t_u$  jest tak dobrany, aby przemieszczenie tego punktu było równe zadanemu  $s_z$ .

$$s_z = \int_0^{t_k} v_w(t) \cdot dt \quad (6.33)$$

Dzięki istnieniu układu regulacji prędkości i przemieszczenia, w warunkach ustalonych prędkości obydwu czołownic  $v_1$  i  $v_w$ , a tym samym prędkość punktu zawieszenia ładunku  $v_w$  są takie same i proporcjonalne do sygnału sterującego  $U$ . Znajomość przebiegu funkcji  $v_w(t)$  w ruchu roboczym determinuje kształt funkcji sterującej  $U(t)$  dla całego układu.

$$U(t) = k_z^{-1} \cdot v_w(t) \quad (6.34)$$

Na początku ruchu most może być zukosowany. Odchyłki położenia między czołownicami i punktem zawieszenia ładunku są wprowadzane do układu jako uchyby początkowe położenia

### 6.7. Badania symulacyjne i eksperymentalne.

Przeprowadzone zostały badania symulacyjne i eksperymentalne opisanego układu mechanizmu jazdy mostu suwnicy pomostowej wraz z układem sterowania i regulacji położenia. Zbadano ruch roboczy mechanizmu obejmujący rozruch w czasie  $t_r = 4$  s, ruch ustalony w czasie  $t_u$  około 9 s oraz hamowanie w czasie  $t_h = 4$  s dla suwnicy obciążonej ładunkiem o masie 5000 kg przy niesymetrycznym położeniu wózka na moście. W celu sprawdzenia układu pozycjonowania obydwu czołownic, zarówno w badaniach symulacyjnych, jak i eksperymentalnych wprowadzono początkowe uchyby położenia czołownic względem środka mostu suwnicy. Zastosowano następujące rodzaje sterowań w ruchu roboczym:

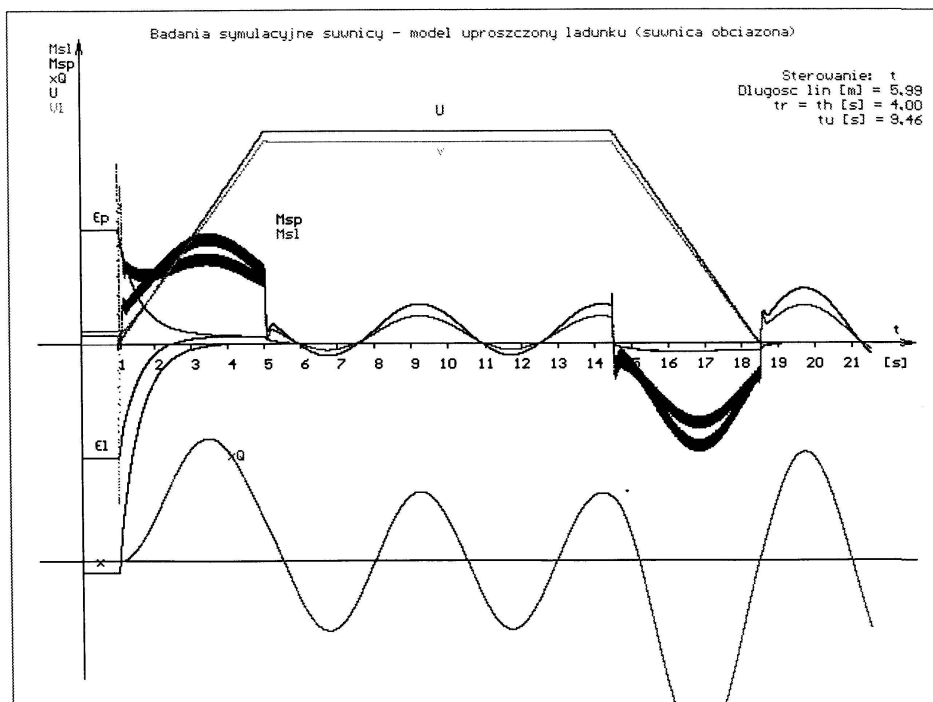
- według funkcji liniowej przy rozruchu i hamowaniu (symbol „t” – funkcja „trapezowa”),
- optymalne, wyznaczone metodą analityczną dla modelu ładunku potraktowanego jako wahadło matematyczne (symbol „o1”, rys. 6.11 a),
- optymalne, wyznaczone metodą rzutu gradientu dla modelu ładunku potraktowanego jako wahadło matematyczne (symbol „o2”, rys. 6.11 b),
- optymalne, wyznaczone metodą rzutu gradientu dla modelu uwzględniającego ruch płaski ładunku (symbol „o2”, rys. 6.11 c).

Badania symulacyjne przeprowadzono dla układu pełnego przy wykorzystaniu dwóch modeli zawieszonoego na linach ładunku:

- potraktowanego jako wahadło matematyczne,
- opisującego płaski ruch ładunku.

Wyniki badań symulacyjnych przedstawiono na rysunkach 6.12 ÷ 6.16. Na każdym rysunku pokazano przebiegi czasowe opisujące następujące wielkości fizyczne:

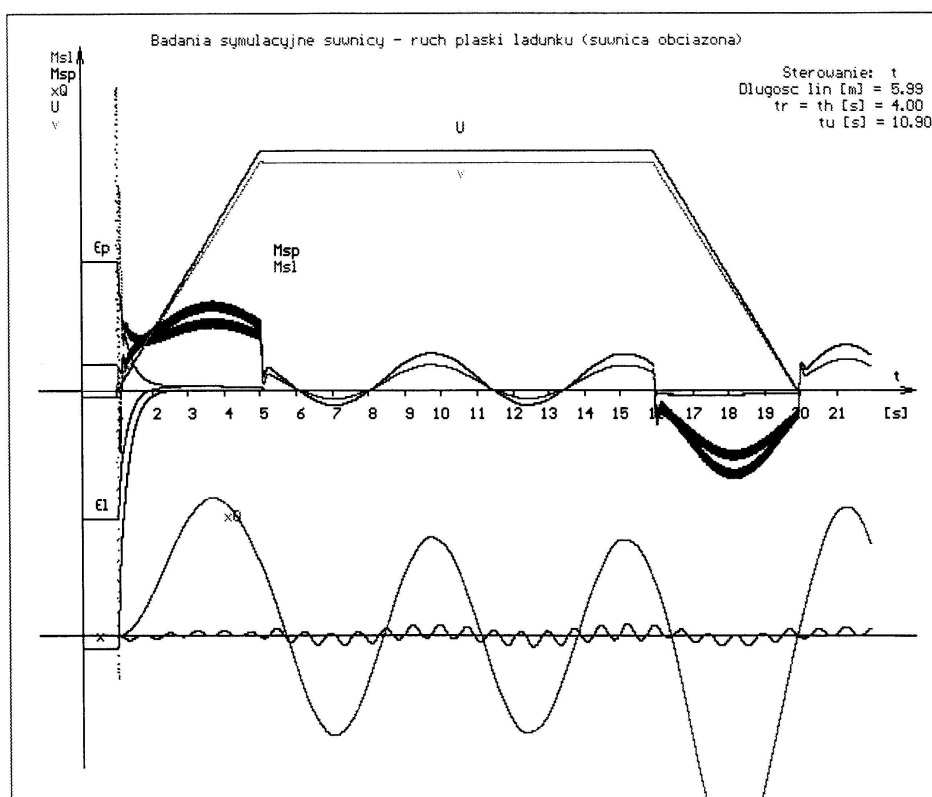
- $U$  - napięcie sterujące jednakowe dla obu czołownic,
- $v$  - prędkość punktu zaczepienia lin ładunku w kierunku ruchu mostu,
- $M_{sl}, M_{sp}$  - momenty rozwijane przez silniki elektryczne lewej i prawej czołownicy,
- $x$  - różnicę przemieszczeń lewej i prawej czołownicy,
- $\varepsilon_l, \varepsilon_p$  - uchyb przemieszczenia lewej i prawej czołownicy,
- $x_Q$  - przemieszczenie poziome punktu zawieszenia lin ładunku względem punktu połączenia lin z ładunkiem,
- $\varphi_Q$  - kąt położenia ładunku względem osi wychylonych lin (tylko dla płaskiego ruchu ładunku).



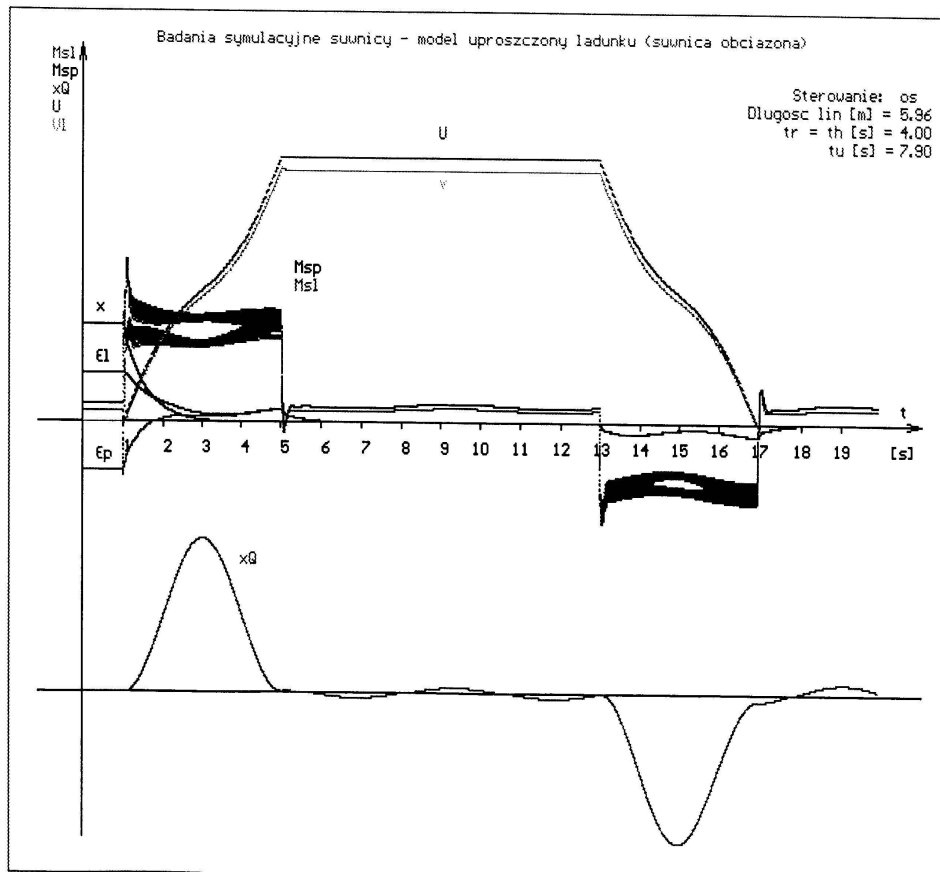
Rys. 6.12. Badania symulacyjne. Sterowanie liniowe „I”. Ładunek potraktowany jako wahadło matematyczne.

Na każdym rysunku podane zostały ponadto następujące informacje:

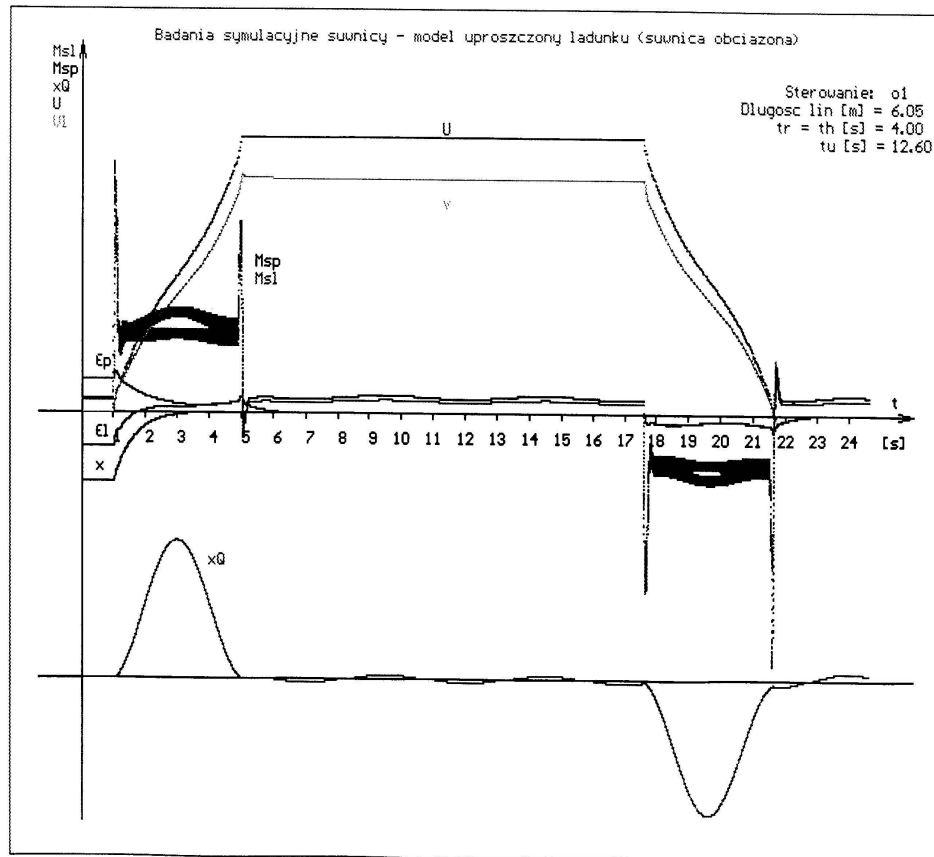
- rodzaj modelu ładunku (model uproszczony = wahadło matematyczne lub płaski ruch ładunku),
- rodzaj sterowania („l”, „os”, „o1” lub „o2”),
- długość lin ładunku ( $L_A$ ),
- czas rozruchu i czas hamowania ( $t_r$  i  $t_h$ ),
- czas ruchu ustalonego ( $t_u$ ).



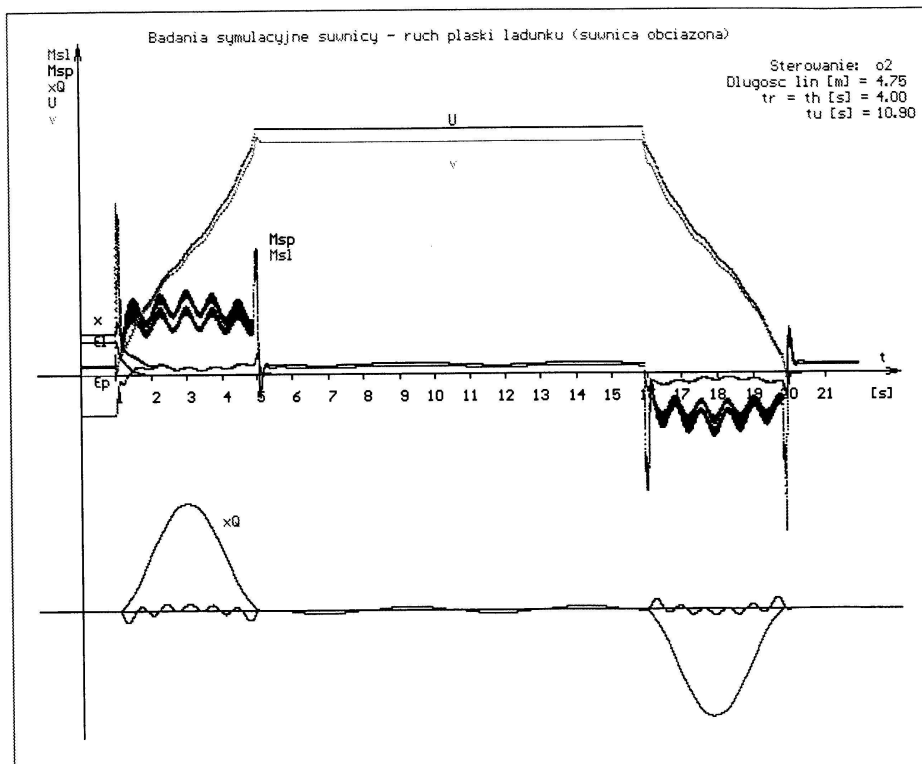
Rys. 6.13. Badania symulacyjne. Sterowanie liniowe „l”. Model uwzględniający ruch płaski ładunku.



Rys. 6.14. Badania symulacyjne. Sterowanie optymalne „os”.  
Ładunek potraktowany jako wahadło matematyczne.



Rys. 6.15. Badania symulacyjne. Sterowanie optymalne „o1”. Ładunek potraktowany jako wahadło matematyczne.

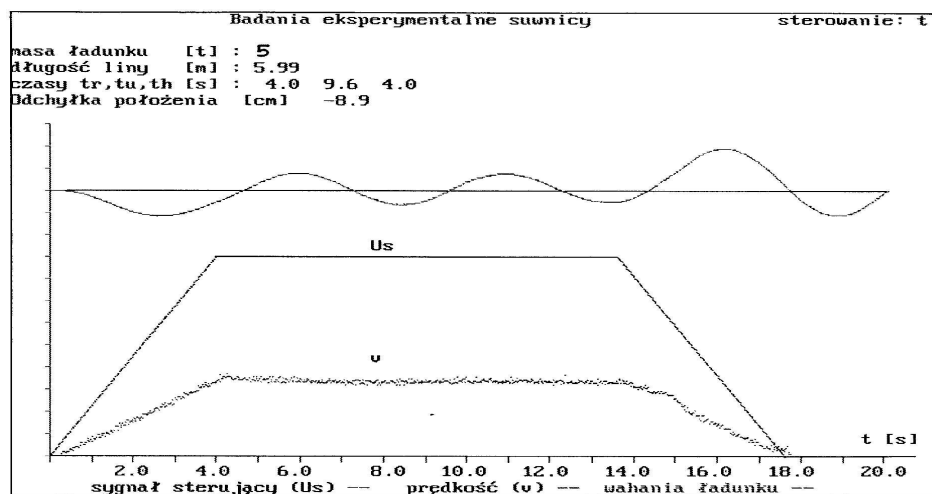


Rys. 6.16. Badania symulacyjne. Sterowanie optymalne „o2”.  
Model uwzględniający ruch płaski ładunku.

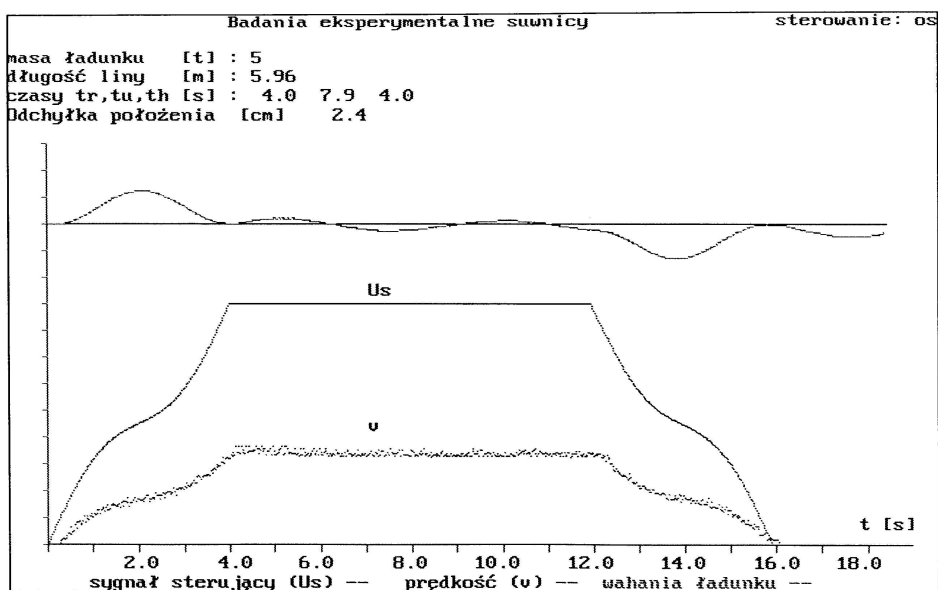
Przeprowadzone badania eksperymentalne objęły te same przypadki ruchu roboczego, dla których wykonano badania symulacyjne. Ich wyniki pokazano na rysunkach 6.17 ÷ 6.20. Na każdym rysunku pokazano przebiegi czasowe opisujące następujące wielkości fizyczne:

- $U$  - sygnał sterujący,
- $v$  - prędkość wózka w kierunku ruchu mostu,
- $x_Q$  - przemieszczenie poziome punktu zawieszenia lin ładunku względem punktu połączenia lin z ładunkiem,

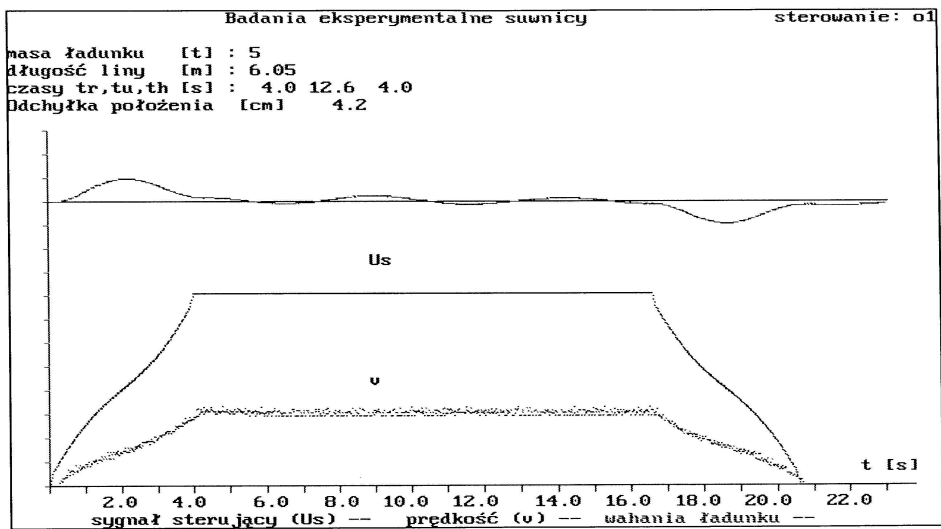




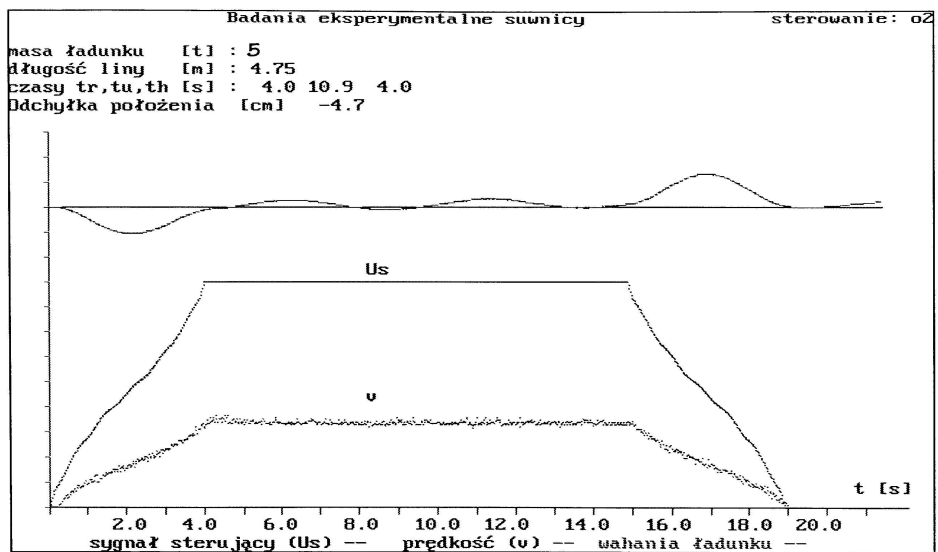
Rys. 6.17. Badania eksperymentalne. Sterowanie liniowe „l”.



Rys. 6.18. Badania eksperymentalne. Sterowanie optymalne „os”.



Rys. 6.19. Badania eksperymentalne. Sterowanie optymalne „o1”.



Rys. 6.20. Badania eksperymentalne. Sterowanie optymalne „o2”.

Na każdym rysunku podane zostały ponadto następujące informacje:

- rodzaj sterowania („l”, „os”, „o1” lub „o2”),
- masa ładunku ( $m_Q$ ),
- długość lin ładunku ( $L_A$ ),
- czas rozruchu i czas hamowania ( $t_r$  i  $t_h$ ) i czas ruchu ustalonego ( $t_u$ ),
- końcowa odchyłka położenia wózka w kierunku ruchu mostu.

### 6.8. Podsumowanie.

Opracowano model dynamiczny suwnicy napędzanej indywidualnymi mechanizmami jazdy zasilanymi z elektroenergetycznych przetwornic częstotliwości współpracujących z silnikami asynchronicznymi. Modele napędów zostały zweryfikowane i pozwalają na uzyskanie zadawalającej zgodności między badaniami symulacyjnymi i eksperymentalnymi. Można dzięki nim uzyskać przebiegi czasowe zmiennych trudno dostępnych w badaniach eksperymentalnych, takich jak np. moment napędowy silnika elektrycznego  $M_s$ . Z badań symulacyjnych wynika, że układ reaguje silnymi zmianami momentów napędowych silników na skokowe zmiany pochodnej sygnału sterującego  $U$ , są one jednak krótkotrwałe. Utrzymujące się w okresach ruchów nieustalonych drgania momentu o wysokiej częstotliwości wynikają ze skokowych, następujących co 25 ms zmian sygnału sterującego podawanego do falownika, co z kolei związane jest z takim właśnie czasem próbkowania w układzie rzeczywistym.

Przeprowadzone badania pozwalają stwierdzić, że zastosowanie sterowania optymalnego („os”, „o1”, „o2”) umożliwia wytłumienie wahań ładunku po okresach rozruchu i hamowania przy różnych długościach lin ładunku i przy różnych masach ładunku. Dzięki zastosowaniu układu regulacji prędkości i przemieszczenia można było ograniczyć optymalizację jedynie do układu zawieszzonego na linach ładunku, co znacząco zmniejsza czas wyznaczania sterowania optymalnego. Zauważono przy tym wyraźny związek między jakością optymalizacji i dokładnością określenia długości lin ładunku.

Potwierdzone zostały dobre własności dynamiczne i statyczne układu regulacji przemieszczenia. Zaobserwowane uchyby przemieszczenia po zakończeniu ruchu roboczego nie przekraczają przeciętnych wartości rzędu 2 cm przy uchybach maksymalnych nie przekraczających 4 cm. Podanie jednakowego sygnału sterującego do

każdej z czołownic pozwala na szybką eliminację początkowego zukosowania suwnicy oraz uniemożliwia jego powstanie w trakcie trwania ruchu roboczego.

## **7. OPTYMALNE STEROWANIE RUCHAMI SKOJARZONYMI SUWNICY PRZY TRANSPORCIE POZIOMYM ŁADUNKU.**

Układ sterowania suwnicy eksperymentalnej opisanej w rozdziale 6.2 umożliwia niezależną pracę mechanizmów jazdy mostu i wózka. Odpowiednie sterowanie skojarzonymi ruchami tych mechanizmów pozwala na przemieszczenie wiotko zawieszonoego na linach ładunku do dowolnego punktu płaszczyzny poziomej pola pracy suwnicy przy zachowaniu przyjętych kryteriów optymalizacji.

### **7.1. Koncepcja transportu poziomego.**

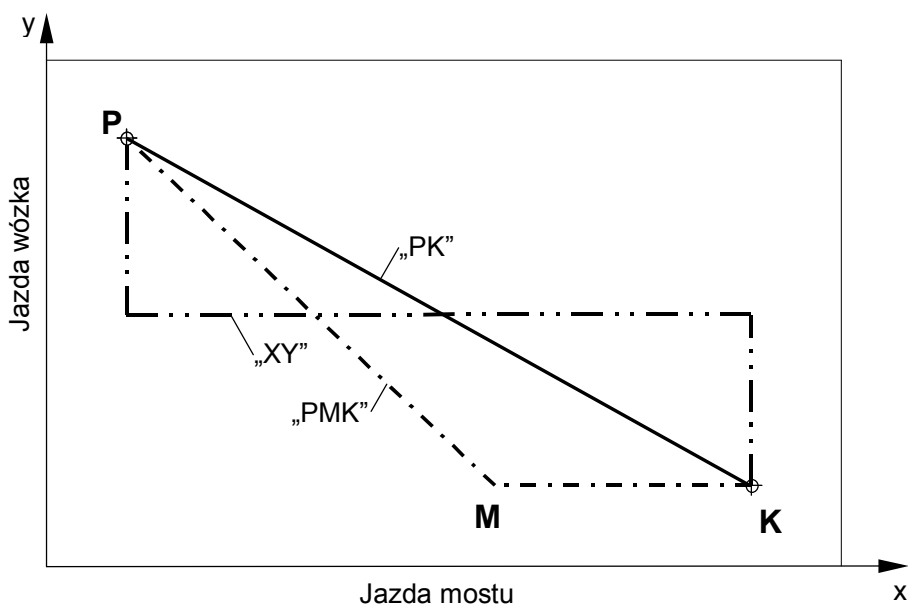
Opracowana została technologia systemu transportu poziomego ładunku umożliwiająca ruch ładunku i zawiesia na określonych poziomach transportowych. Wybór odpowiedniego poziomu dokonywany jest przez komputer pokładowy na podstawie przyjętej strategii transportu. Na wybór poziomu transportowego mają wpływ następujące czynniki:

- przemieszczenie z ładunkiem lub bez ładunku,
- usytuowanie punktu poboru ładunku,
- usytuowanie punktu dostawienia ładunku,
- parametry geometryczne ładunku i zawiesia,
- konfiguracja przestrzeni na drodze transportu (przeszkody stałe),
- opcja i droga przemieszczenia poziomego,
- bezpieczeństwo i minimalizacja czasu transportu.

Na rys. 7.1 przedstawiona jest mapa obsługiwanego przez suwnicę pola transportu z zaznaczonymi punktami poboru i dostawiania ładunków. Transport poziomy określonego ładunku z punktu poboru P do punktu dostawienia K może odbyć się trzema metodami („PK”, „PMK” i „XY”) w zależności od wybranego poziomu przemieszczania ładunku.

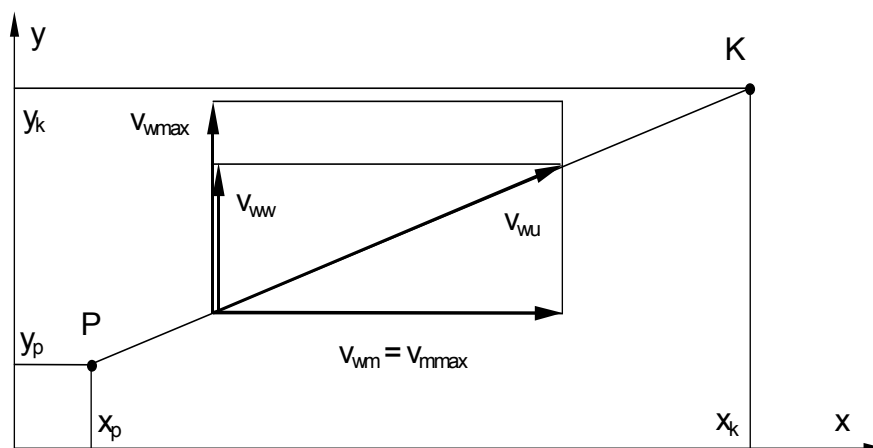
- a) Przemieszczenie poziome ładunku z punktu P do K wzdłuż linii prostej PK jest możliwe tylko na najwyższym poziomie transportowym, ze względu na istniejące przeszkody.

- b) Realizacja przemieszczenia poziomego wzdłuż łamanej PMK (z uwagi na konieczność ominięcia przeszkody) jest możliwa na niższym poziomie transportowym.
- c) Na najniższym poziomie transportowym przy dużym zagęszczeniu przeszkód możliwa jest jedynie droga XY złożona z kolejnych indywidualnych ruchów jezdnych wózka i mostu.



Rys. 7.1. Mapa pola transportu poziomego.

Prowadzenie ładunku wzdłuż prostej PK (sposób „a”, rys. 7.1) wymaga odpowiedniego skojarzenia prędkości jazdy mostu i wózka. Sposób określania wzajemnych proporcji prędkości zadanej mostu  $v_{wm}$  i wózka  $v_{ww}$  oraz maksymalnej prędkości wypadkowej  $v_w$  punktu zaczepienia lin ładunku z uwagi na możliwości mechanizmów pokazano na rys. 7.2. Łatwo zauważyć, że w tym przypadku wykorzystana jest maksymalna prędkość jazdy mostu  $v_{mmax}$ , natomiast prędkość maksymalna jazdy wózka musi zostać ograniczona do wartości  $v_{ww}$ .

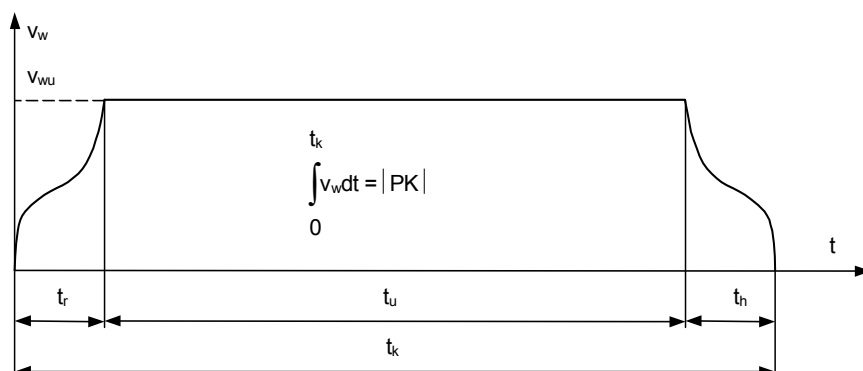


Rys. 7.2. Sposób określania składowych prędkości zadanej.

Sterowanie ruchami skojarzonymi mechanizmu jazdy mostu i wózka odbywa się tak, aby punkt zawieszenia lin ładunku poruszał się wzdłuż prostej PK osiągając między okresem rozruchu i hamowania stałą maksymalną możliwą do osiągnięcia prędkość  $v_{wu}$ . Procedura wyznaczania przebiegu prędkości  $v_w(t)$  w ruchu roboczym została opisana w rozdziale 6.6. Przebiegi czasowe prędkości w okresach ruchu nieustalonego wynikają z wymagań optymalizacji i umożliwiają wytłumienie wahań ładunku po rozruchu oraz po zatrzymaniu układu. Czas ruchu ustalonego  $t_u$  z maksymalną możliwą prędkością  $v_{wu}$  wzdłuż prostej PK jest tak dobrany, aby w całym ruchu roboczym przemieszczenie zadane punktu zawieszenia lin ładunku odpowiadało długości odcinka PK. Przykładowy przebieg wypadkowej prędkości  $v_w(t)$  pokazano na rys. 7.3.

Znajomość przebiegu prędkości wypadkowej oraz położenia punktów P i K (rys. 7.2) determinuje przebiegi zadanych prędkości mostu i wózka. Słuszne są przy tym poniższe zależności.

$$\begin{aligned}
 v_{wm}(t) &= v_w(t) \cdot \cos \alpha & \cos \alpha &= \frac{x_k - x_p}{\sqrt{(x_k - x_p)^2 + (y_k - y_p)^2}} \\
 v_{ww}(t) &= v_w(t) \cdot \sin \alpha & \sin \alpha &= \frac{y_k - y_p}{\sqrt{(x_k - x_p)^2 + (y_k - y_p)^2}}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$



Rys. 7.3. Zadana prędkość wypadkowa punktu zawieszenia lin ładunku w ruchu roboczym.

Prowadzenie ładunku wzdłuż łamanej PMK (sposób „b”, rys. 7.1) może odbywać się trzema sposobami.

- I. Ruch wzdłuż prostej PM z zatrzymaniem w punkcie M, potem ruch samego mostu na odcinku MK.
- II. Określenie maksymalnych prędkości jazdy mostu i wózka dla ruchu wzdłuż prostej PM oraz niezależny ruch każdego z mechanizmów; mostu na drodze  $s_m = x_k - x_p$  i wózka na drodze  $s_w = y_k - y_p = y_m - y_p$  bez zatrzymania w punkcie M. Ponieważ ruchy mostu i wózka są wzajemnie prostopadłe i wahania ładunku w obu płaszczyznach są w założeniu niezależne, można wyznaczyć optymalne funkcje sterujące osobno dla każdego mechanizmu.
- III. W szczególnym przypadku, kiedy ładunek nie musi poruszać się ściśle wzdłuż zadanego toru, ale musi jedynie ominąć przeszkodę, można przemieścić ładunek z punktu P do K wykorzystując maksymalne prędkości obu mechanizmów i niezależne sterowanie każdego z nich. W takim przypadku ruch roboczy jednego mechanizmu zawiera się w okresie ruchu roboczego drugiego i całkowity czas ruchu jest krótszy.

O wyborze sposobu prowadzenia ładunku decyduje czas trwania ruchu roboczego. Może się okazać, że ograniczenie maksymalnej prędkości jednego z mechanizmów jest tak duże, że krótszy czas ruchu uzyska się sposobem „I” z zatrzymaniem ładunku w punkcie M.

Prowadzenie ładunku drogą XY (sposób „c”, rys. 7.1) złożoną z kolejnych indywidualnych ruchów jezdnych samego wózka i samego



mostu jest wprawdzie mało efektywne, ale nie stwarza większych problemów z punktu widzenia optymalizacji.

## 7.2. Model dynamiczny ładunku dla transportu w płaszczyźnie poziomej.

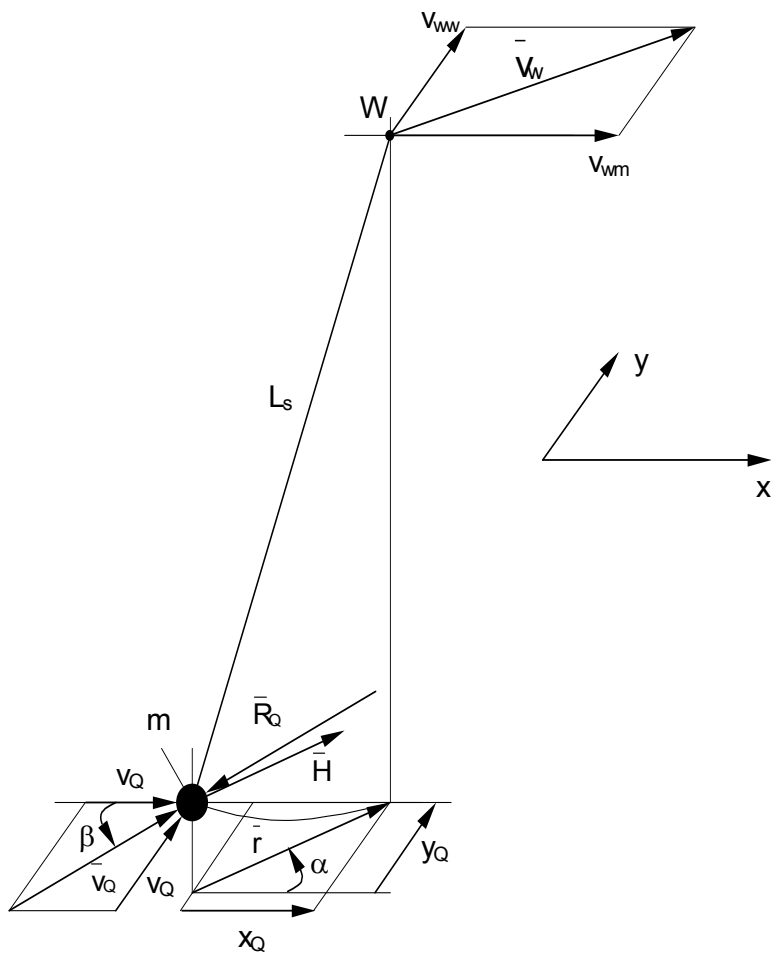
W rozdziale 6.3 opisano model mechanizmu jazdy mostu suwnicy z napędem falownikowym. Zastosowanie powyższego modelu do opisu ruchów skojarzonych mostu i wózka wymaga kilku nowych założeń i zmian, wymienionych poniżej.

- Siły obciążające most pochodzące od wózka i działające w kierunku jego ruchu względem mostu nie mają wpływu na ruch mostu.
- Zmieniające się w czasie ruchu roboczego położenie wózka na moście powoduje zmianę momentu bezwładności mostu w płaszczyźnie poziomej. Zmiana ta została uwzględniona w modelu, założono jednak, że przebiega wolno i nie wymaga użycia innych równań ruchu, właściwych dla układów o zmiennej masie.
- Ładunek zawieszony na linach waha się w dwóch kierunkach. Przyjęto, że most obciążają tylko składowe siły w linach działające w kierunku ruchu mostu.

Model wózka wraz z mechanizmem jazdy nie został opisany w niniejszej pracy. Jest on analogiczny do modelu mechanizmu jazdy mostu z tym, że wózek potraktowany został jako ciało o masie skupionej z pominięciem jego momentu bezwładności w płaszczyźnie poziomej. Podobnie jak w modelu mostu, przyjęto, że siły obciążające wózek pochodzące od mostu i działające w kierunku jego ruchu nie mają wpływu na ruch wózka. Wózek obciążają tylko składowe siły w linach ładunku działające w kierunku ruchu wózka.

Zawieszony na linach ładunek został potraktowany jako wahadło matematyczne wykonujące ruch sferyczny (rys. 7.4). Z modelem ładunku związane są następujące zmienne stanu.

- $v_{Qx}$  - składowa prędkości ładunku w kierunku ruchu mostu,
- $v_{Qy}$  - składowa prędkości ładunku w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu mostu,
- $x_Q$  - przemieszczenie punktu zaczepienia lin na wózku względem ładunku w kierunku ruchu mostu,
- $y_Q$  - przemieszczenie punktu zaczepienia lin na wózku względem ładunku w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu mostu.



Rys. 7.4. Model dynamiczny ładunku potraktowanego jako wahadło sferyczne.

Stosując oznaczenia z rys. 7.4 i założenia z rozdziału 5.1 można opisać ruch ładunku w płaszczyźnie poziomej stosując poniższe zależności.

$$m_Q \cdot \frac{d\bar{v}_Q}{dt} = \bar{H} + \bar{R}_Q \quad (7.2)$$

$\bar{v}_Q$  - wektor wypadkowy prędkości poziomej ładunku,

$\bar{H} = c_Q \cdot \bar{r}$  - składowa pozioma siły w linach,

$\bar{R}_Q = -f_Q \cdot \bar{v}_Q$  - siła oporu powietrza dla ładunku,

$\bar{r}$  - wypadkowe wychylenie poziome punktu zaczepienia lin na wózku względem ładunku.

Rzutuując równanie (7.2) na kierunek ruchu mostu x i wózka względem mostu y otrzymuje się zależności (7.3).

$$\begin{aligned} m_Q \cdot \frac{dv_{Qx}}{dt} &= c_Q \cdot |\bar{r}| \cdot \cos \alpha - f_Q \cdot |\bar{v}_Q| \cdot \cos \beta \\ m_Q \cdot \frac{dv_{Qy}}{dt} &= c_Q \cdot |\bar{r}| \cdot \sin \alpha - f_Q \cdot |\bar{v}_Q| \cdot \sin \beta \\ |\bar{r}| &= \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2} \quad |\bar{v}_Q| = \sqrt{v_{Qx}^2 + v_{Qy}^2} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Funkcje trygonometryczne kątów  $\alpha$  i  $\beta$  opisują zależności (7.4).

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x_Q}{|\bar{r}|} & \cos \beta &= \frac{v_{Qx}}{|\bar{v}_Q|} \\ \sin \alpha &= \frac{y_Q}{|\bar{r}|} & \sin \beta &= \frac{v_{Qy}}{|\bar{v}_Q|} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Wykorzystując związki (7.3) i (7.4) oraz zależności kinematyczne można przedstawić opis matematyczny modelu ładunku w przestrzeni zmiennych stanu.

$$\begin{aligned} \frac{dv_{Qx}}{dt} &= -\frac{f_Q}{m_Q} \cdot v_{Qx} + \frac{c_Q}{m_Q} \cdot x_Q \\ \frac{dv_{Qy}}{dt} &= -\frac{f_Q}{m_Q} \cdot v_{Qy} + \frac{c_Q}{m_Q} \cdot y_Q \\ \frac{dx_Q}{dt} &= -v_{Qx} + v_{wm} \\ \frac{dy_Q}{dt} &= -v_{Qy} + v_{ww} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Zbudowany został model dla ruchów skojarzonych mechanizmów jazdy mostu i wózka suwnicy wraz z modelem zawieszonym na linach

ładunku. Wektor zmiennych stanu modelu posiada następujące składowe:

$$\mathbf{x} = [ M_{sl}, M_{sp}, M_{sw}, M_l, M_p, M_w, U_{sl}, U_{sp}, U_{sw}, \varepsilon_{sl}, \varepsilon_{sp}, \varepsilon_{sw}, v_l, v_p, v_{ww}, v_{Qx}, v_{Qy}, x_Q, y_Q ] \quad (7.5)$$

Zmienne oznaczone indeksem „w” związane są z układem regulacji położenia i napędu wózka.

Zmienne sterujące stanowią sygnały napięciowe  $U_m$  dla mostu i  $U_w$  dla wózka proporcjonalne w warunkach ustalonych do prędkości obydwu czołownic mostu  $v_l$  i  $v_p$  oraz wózka  $v_{ww}$ .

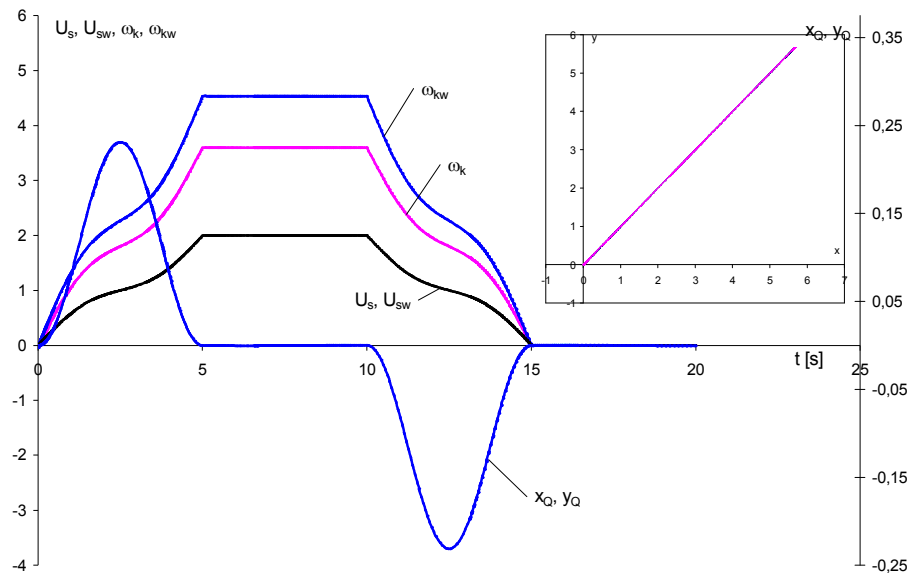
Zakłócenie stanowią zmienne opory ruchu obydwu czołownic  $W_l$  i  $W_p$  oraz wózka  $W_w$ .

### **7.3. Badania symulacyjne i eksperymentalne.**

Dla suwnicy opisanej w rozdziale 6.2 przeprowadzono serię badań symulacyjnych i eksperymentalnych obejmujących ruchy skojarzone mechanizmów jazdy mostu i wózka.

Przykładowe wyniki badań symulacyjnych pokazano na rysunkach 7.5 i 7.6. Pokazano na nich przebiegi czasowe opisujące następujące wielkości fizyczne:

- $U_s$  - sygnał sterujący mechanizmu jazdy mostu,
- $U_{sw}$  - sygnał sterujący mechanizmu jazdy wózka,
- $\omega_k$  - prędkość kątowna kół mostu,
- $\omega_{kw}$  - prędkość kątowna kół wózka,
- $x_Q$  - przemieszczenie punktu zaczepienia lin na wózku względem ładunku w kierunku ruchu mostu,
- $y_Q$  - przemieszczenie punktu zaczepienia lin na wózku względem ładunku w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu mostu.

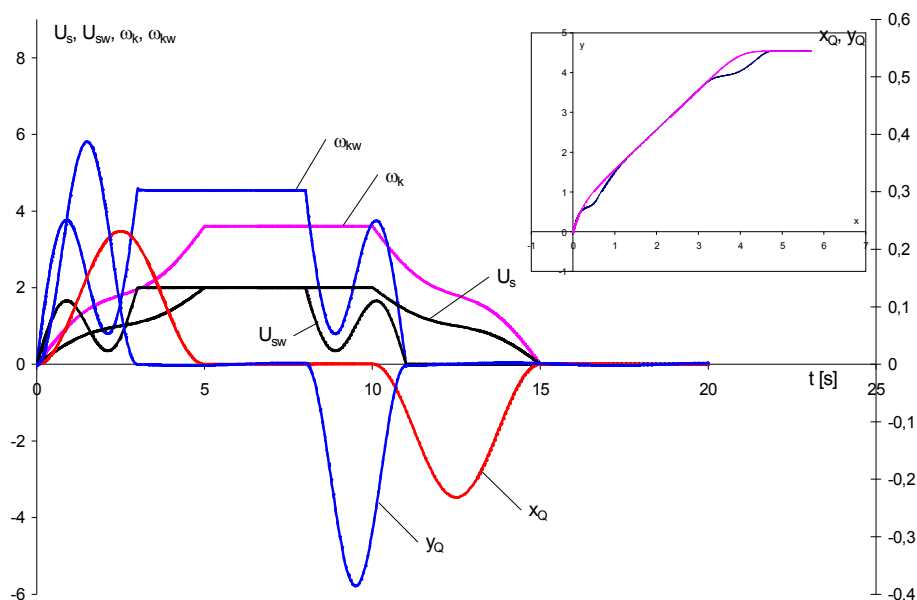


Rys. 7.5. Badania symulacyjne ruchów skojarzonych. Prowadzenie ładunku wzdłuż linii prostej poziomej.

Dodatkowo na rysunkach 7.5 i 7.6 pokazano w układzie współrzędnych  $x$  (kierunek ruchu mostu) i  $y$  (kierunek ruchu wózka względem mostu) tor ruchu punktu  $W$  zawieszenia lin na wózku oraz tor ruchu ładunku.

Na rys. 7.5 pokazano przypadek ruchu wzdłuż linii prostej poziomej (sposób „a”, rys. 7.1). Przyjęto czasy rozruchu i hamowania obu mechanizmów odpowiednio  $t_r = t_h = 5$  s.

Na rys. 7.6 pokazano przypadek ruchu wzdłuż łamanej z zastosowaniem maksymalnych prędkości mechanizmów jazdy mostu i wózka oraz niezależnego sterowania każdym z mechanizmów (sposób „b-III”, rys. 7.1). Przyjęto czasy rozruchu i hamowania dla mechanizmu jazdy mostu odpowiednio  $t_r = t_h = 5$  s, dla mechanizmu jazdy wózka odpowiednio  $t_r = t_h = 3$  s. Ruch roboczy wózka zawiera się w okresie ruchu roboczego mostu.



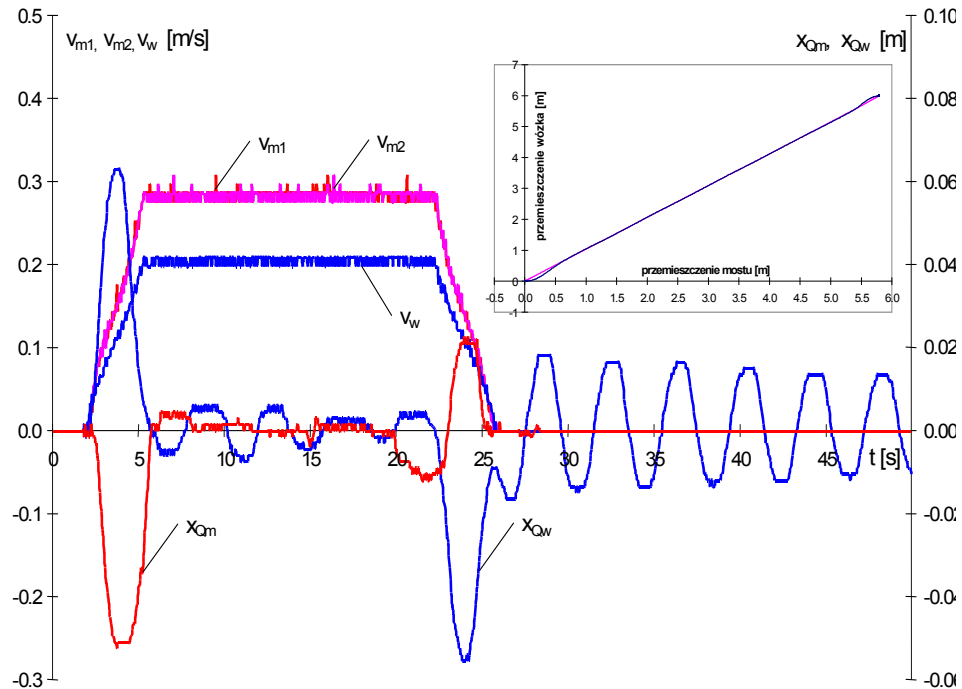
Rys. 7.6. Badania symulacyjne ruchów skojarzonych.  
Prowadzenie ładunku wzdłuż linii łamanej.

Przykładowe wyniki badań eksperymentalnych pokazano na rysunkach 7.7 i 7.8. Pokazano na nich przebiegi czasowe opisujące następujące wielkości fizyczne:

- $v_{m1}$  - prędkość lewej czołownicy,
- $v_{m2}$  - prędkość prawej czołownicy,
- $v_w$  - prędkość wózka względem mostu,
- $x_{Qm}$  - przemieszczenie punktu zaczepienia lin na wózku względem ładunku w kierunku ruchu mostu,
- $x_{Qw}$  - przemieszczenie punktu zaczepienia lin na wózku względem ładunku w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu mostu.

Dodatkowo na rysunkach 7.7 i 7.8 pokazano w układzie współrzędnych  $x$  (kierunek ruchu mostu) i  $y$  (kierunek ruchu wózka względem mostu) tor ruchu punktu zawieszenia lin na wózku oraz tor ruchu ładunku. Zaznaczono również błąd dojazdu mostu i wózka do zadanego położenia, odpowiednio  $\Delta x_m$  i  $\Delta x_w$ .

Na rys. 7.7 pokazano przypadek ruchu wzdłuż linii prostej poziomej (sposób „a”, rys. 7.1).



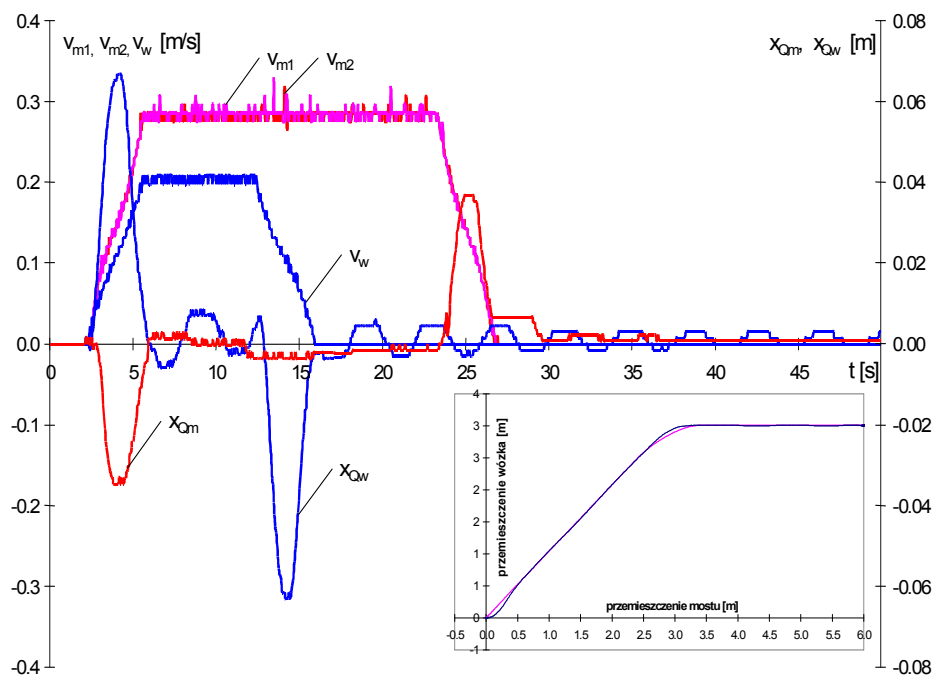
Rys. 7.7. Badania eksperymentalne ruchów skojarzonych. Prowadzenie ładunku wzdłuż linii prostej poziomej.

Na rys. 7.8 pokazano przypadek ruchu wzdłuż łamanej z zastosowaniem maksymalnych prędkości mechanizmów jazdy mostu i wózka oraz niezależnego sterowania każdym z mechanizmów (sposób „b-III”, rys. 7.1). Ruch roboczy wózka zawiera się w okresie ruchu roboczego mostu przy jednoczesnym starcie obu mechanizmów.

#### 7.4. Podsumowanie.

Przeprowadzone badania symulacyjne i eksperymentalne potwierdzają celowość prowadzenia transportu ładunków z zastosowaniem sterowania optymalnego. Możliwe jest tłumienie wahań

ładunku oraz uzyskanie dobrej dokładności dojazdu przy skojarzonych ruchach mechanizmu jazdy mostu i wózka. Funkcje sterujące dobrano tak, aby nie wystąpił poślizg między kołem napędowym i szyną. Pojawienie się poślizgu prowadzi do utraty kontroli nad ruchem ładunku.



Rys. 7.8. Badania eksperymentalne ruchów skojarzonych.  
Prowadzenie ładunku wzdłuż linii łamanej.

Niedokładności dojazdu do zadanego położenia rzędu 1 cm wynikają z istnienia strefy nieczułości falowników przy małych wartościach sygnału sterującego. Niewytlumienie do końca wahań ładunku w badaniach eksperymentalnych wynika z niedoskonałości przyjętego modelu zawieszono na linach ładunku potraktowanego jako wahadło sferyczne. W rzeczywistości dla układu linowego czteropasmowego zdwojonego sztywność poziomego zawieszenia ładunku jest nieco inna dla kierunku ruchu mostu i wózka.



## 8. OPTIMALIZACJA TRANSPORTU ŁADUNKU W RUCHU ROBOCZYM ŻURAWIA PORTOWEGO.

Osobną klasę zagadnień stanowi transport poziomy ładunku za pomocą maszyn o ruchu obrotowym i wypadowym. Klasycznym przykładem jest tutaj portowy żuraw wypadowy, pracujący cyklicznie ruchem przerywanym, gdzie optymalne prowadzenie ładunku posiada duże znaczenie eksploatacyjne.

Jako przykład do badań i analizy wybrano rzeczywisty czteroprzegubowy żuraw wypadowy zbudowany ostatnio przez Fabrykę Maszyn i Urządzeń „FAMAK” w Kluczborku dla portu w Gdyni i zainstalowany obecnie na Nabrzeżu Szwedzkim. Żuraw posiada udźwig  $Q = 160$  kN, wysięg maksymalny  $R_{\max} = 36$  m oraz minimalny  $R_{\min} = 11$  m. W żurawiu tym zostały zainstalowane napędy elektromechaniczne zasilane z elektroenergetycznych przetwornic częstotliwości, umożliwiające płynne sterowanie prędkościami ruchów roboczych. Napędy takie umożliwiają zastosowanie opracowanej dla suwnic pomostowych technologii w zakresie uzyskania cech automatycznego prowadzenia ładunku z eliminacją jego wahań i pozycjonowaniem.

W niniejszej pracy założono, że żuraw pracuje w warunkach pogody bezwietrznej lub przy wietrze nie wpływającym na wachania ładunku. Kompensacja działania wiatru na ładunek stanowi osobne zagadnienie będące przedmiotem innych prac [56] prowadzonych w Zakładzie Maszyn Roboczych i Napędów Hydraulicznych Politechniki Łódzkiej.

Ogólnym wymaganiem, koniecznym dla realizacji opracowanej technologii transportu jest możliwość uzyskania płynnego sterowania prędkością układów napędowych mechanizmów roboczych żurawia: obrotu, wypadu i podnoszenia. Mechanizm jazdy, pełniący rolę mechanizmu nastawczego, może być wyposażony w napęd o stałej prędkości ruchu.

Zbadano przydatność zainstalowanych już w rzeczywistym żurawiu napędów elektromechanicznych z silnikami indukcyjnymi klatkowymi, zasilanymi z elektroenergetycznych przetwornic częstotliwości (falowników). Układy te zostały wcześniej rozpoznane w zastosowaniu do

napędów wszystkich mechanizmów laboratoryjnej suwnicy pomostowej opisanej w rozdziale 6.2 oraz w pracy [54].

Innym systemem napędowym, możliwym do zastosowania i rozważanym w niniejszej pracy jest hydrostatyczny napęd ze sterowaniem jednostkami wtórnymi. Podstawową zaletą tego systemu napędowego jest centralne źródło energii w postaci zespołu zasilającego stałociśnieniową linię hydrauliczną, do której podłączone są silniki hydrostatyczne o zmiennej chłonności jednostkowej poszczególnych mechanizmów roboczych żurawia. Dla uzyskania cechy płynnego sterowania prędkością mechanizmu wypadu, napędzanego hydrostatycznym silnikiem liniowym konieczne jest zastosowanie transformatora hydraulicznego. Innym rozwiązaniem może być tutaj zastosowanie typowego napędu mechanicznego np. śrubowego, napędzanego hydrostatycznym silnikiem obrotowym o zmiennej chłonności.

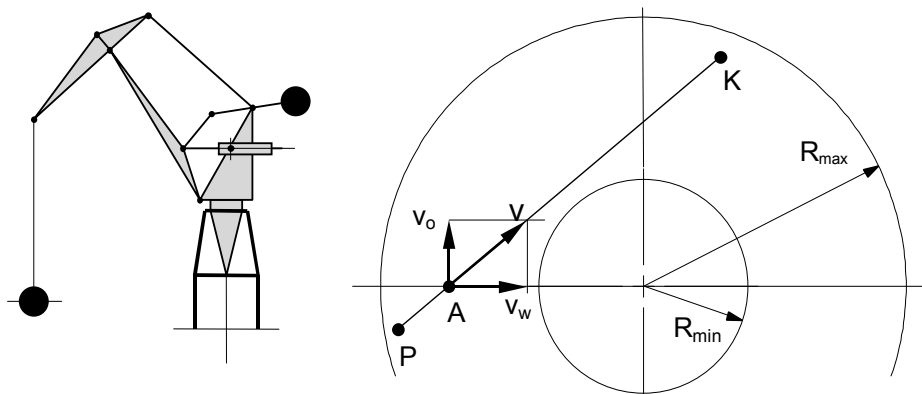
Sieć stałociśnieniowa stwarza możliwość uzyskania automatycznego sposobu rekuperacji energii kinetycznej przy zmniejszaniu prędkości lub hamowaniu hydrostatycznym mechanizmów obrotu i wypadu oraz rekuperacji energii potencjalnej przy opuszczaniu ładunku za pomocą mechanizmu podnoszenia. Odzyskiwana energia może być poprzez sieć hydrauliczną dostarczona do mechanizmów wykonujących w tym czasie pracę dodatnią, a w przypadku jej nadmiaru w układzie może być ona zwracana poprzez stację zasilania do sieci elektrycznej. Umożliwia to zmniejszenie energochłonności żurawia podnosząc sprawność globalną jego cyklu pracy.

Prędkości kątowe silników hydrostatycznych mechanizmów roboczych sterowane są elektronicznie za pomocą indywidualnych sterowników, realizujących układy regulacji prędkości, połączonych z kabiną operatora za pomocą sterownika nadrzędnego. Hydrauliczna stacja zasilająca utrzymująca stałe ciśnienie w sieci hydraulicznej wyposażona jest w integralny regulator stałego ciśnienia sterujący wydajnością pompy.

Własności dynamiczne układów ze sterowaniem wtórnym zostały rozpoznane wcześniej, a odpowiednie wyniki badań zamieszczono w pracach [1], [7].

### 8.1. Koncepcja sterowania skojarzonymi ruchami mechanizmów obrotu i wypadu.

Z obserwacji pracy operatorów żurawi wypadowych wynika, że starają się oni intuicyjnie, manewrując ruchami obrotu i wypadu, prowadzić transportowany ładunek najkrótszą drogą po trajektorii zbliżonej do linii prostej. Obserwacje te stanowiły jedną z zasadniczych przesłanek do przyjęcia założenia takiego kojarzenia prędkości krążka szczytowego w ruchach obrotu i wypadu, aby ładunek w transporcie poziomym poruszał się dokładnie po linii prostej, tak jak pokazano to na rys. 8.1.

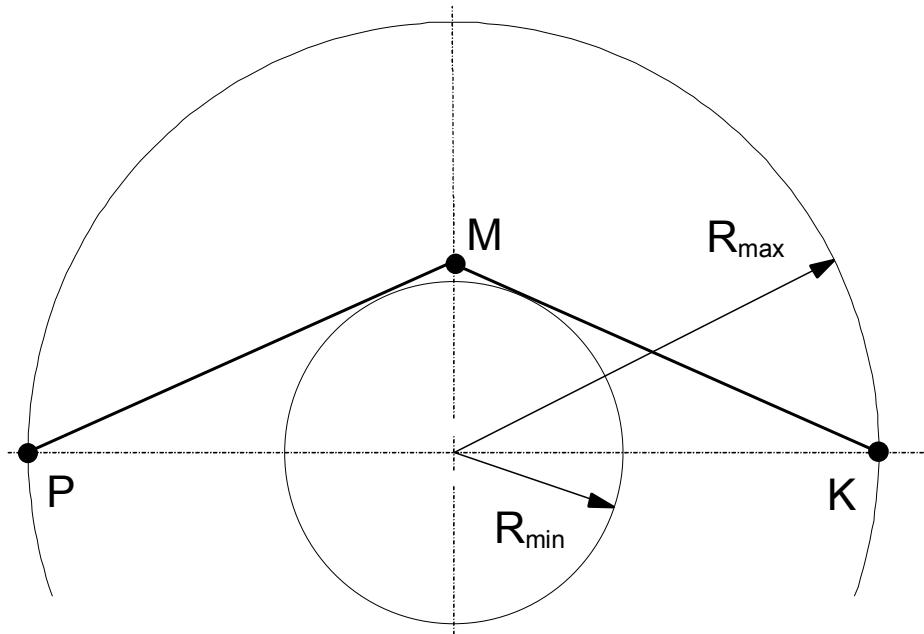


Rys. 8.1. Koncepcja poziomego transportu ładunku za pomocą żurawia wypadowego.

Dla żurawia, którego parametry były podstawą badań, najdłuższa cięciwa koła maksymalnego zasięgu żurawia ( $R_{\max} = 36$  m), styczna do koła określonego minimalnym promieniem wypadu ( $R_{\min} = 11$  m) wynosi 95% średnicy koła maksymalnego zasięgu ( $L_{\max} = 0,95 \cdot D_{\max}$ ). Przed wykonaniem pracy transportowej żuraw jest ustawiany na torze za pomocą mechanizmu jazdy w pozycji dogodnej dla wykonania prac transportowych. Można przyjąć zatem, że w większości przypadków żuraw może być tak ustawiony na torze, aby transport ładunków mógł być wykonany najkrótszą drogą po liniach prostych.

Przyjęto również jako możliwe wykonanie transportu po dwóch liniach prostych w sporadycznych przypadkach szczególnych, w których znajdzie konieczność wykorzystania maksymalnego zasięgu żurawia. Sytuacja taka pokazana jest na rys. 8.2. Wobec tylko 5% zmniejszenia zasięgu żurawia w

stosunku do maksymalnej średnicy wypadu praktycznie nie będzie potrzeby stosowania takich operacji.



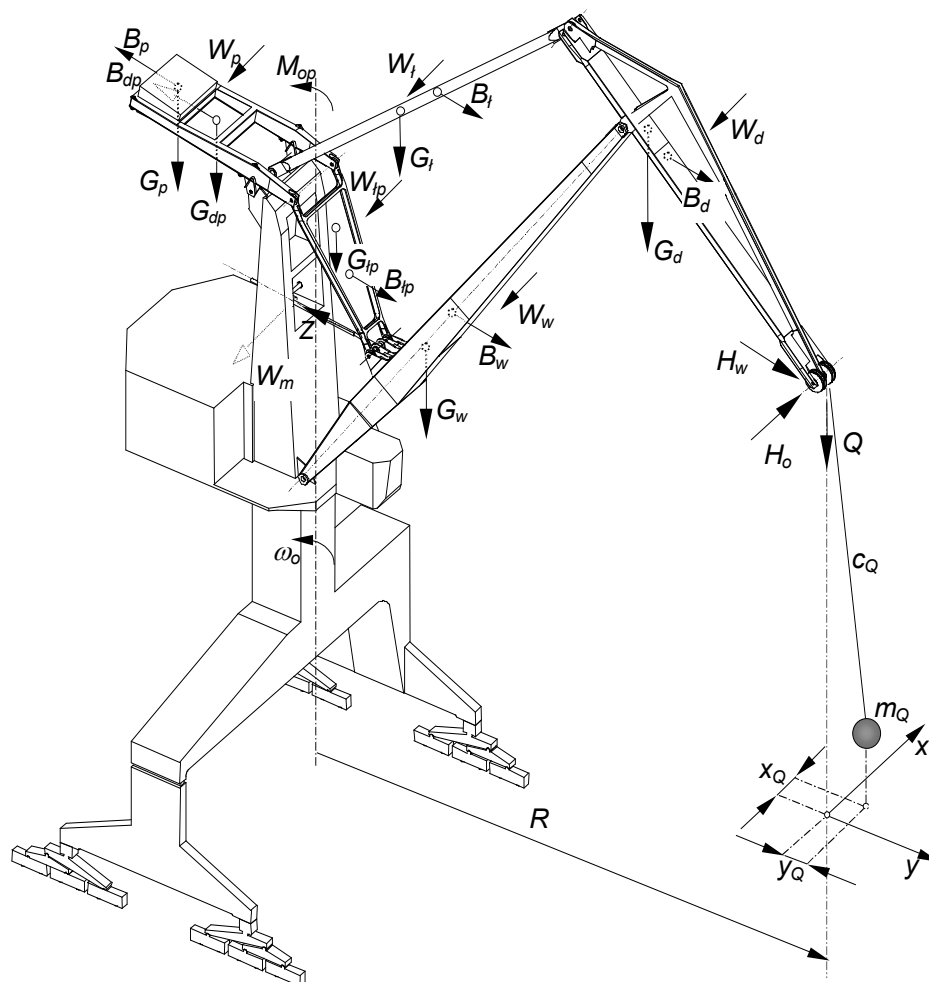
Rys. 8.2. Poziomy transport ładunku z wykorzystaniem pełnego zasięgu żurawia.

Zastosowanie regulacji stałej mocy w mechanizmie podnoszenia wpływa dodatkowo na skrócenie czasu operacji podnoszenia i opuszczania ładunków o masie mniejszej od nominalnej.

## **8.2. Analiza obciążeń i parametry żurawia w ruchu obrotowym i wypadowym.**

W celu przeprowadzenia analizy pracy żurawia opracowano własny, specjalny program komputerowy z wizualizacją graficzną dla wyznaczania obciążeń oraz parametrów masowych mechanizmów obrotu i wypadu.

Na rys. 8.3 przedstawiono, wykonany w ramach tego programu, schemat obciążeń mechanizmu obrotu i wypadu żurawia.



Rys. 8.3. Schemat obciążeń mechanizmów obrotu i wypadu żurawia.

W celu przeprowadzenia analizy obciążeń mechanizmu wypadu związane z nim obracający się układ odniesienia. W układzie tym wprowadzono fikcyjne pozorne siły bezwładności (siły „odśrodkowe”) obciążające elementy układu wypadowego.

Program umożliwia wyznaczanie wypadkowej siły  $Z_w$  w śrubie napędowej lub siłowniku mechanizmu wypadu w warunkach ustalonych w całym zakresie położenia wysięgnika. Siłę tą wyznaczono uwzględniając następujące obciążenia:

- Ciężary elementów układu wypadowego:

- $G_p$  - przeciwwagi,
- $G_{dp}$  - dźwigni przeciwwagi,
- $G_l$  - łącznika,
- $G_w$  - wspory,
- $G_d$  - dzioba,
- $G_{lp}$  - łącznika przeciwwagi.

- Ciężar ładunku  $Q$ ,

- Oddziaływanie spowodowane wychyleniem lin ładunku od pionu

(rys. 8.3):

$$H_w = c_Q \cdot y_Q \quad (8.1)$$

$H_w$  - siła pozioma działająca w płaszczyźnie wypadu,

$c_Q$  - sztywność pozioma zawieszenia ładunku,

$y_Q$  - odchylenie ładunku od pionu mierzone w płaszczyźnie wypadu.

- Siły bezwładności wywołane ruchem obrotowym pochodzące od mas elementów układu wypadowego:

- $B_p$  - przeciwwagi,
- $B_{dp}$  - dźwigni przeciwwagi,
- $B_l$  - łącznika,
- $B_w$  - wspory,
- $B_d$  - dzioba,
- $B_{lp}$  - łącznika przeciwwagi.

Przy wyznaczaniu obciążenia mechanizmu wypadu pochodzącego od sił bezwładności wywołanych ruchem obrotowym przyjęto model przedstawiony na rys. 8.4. Elementy układu wypadowego potraktowano jako jednorodne pręty wykonujące ruch obrotowy względem osi obrotu  $y_0$ . Dla przeciwwagi i dźwigni przeciwwagi przyjęto masy skupione.

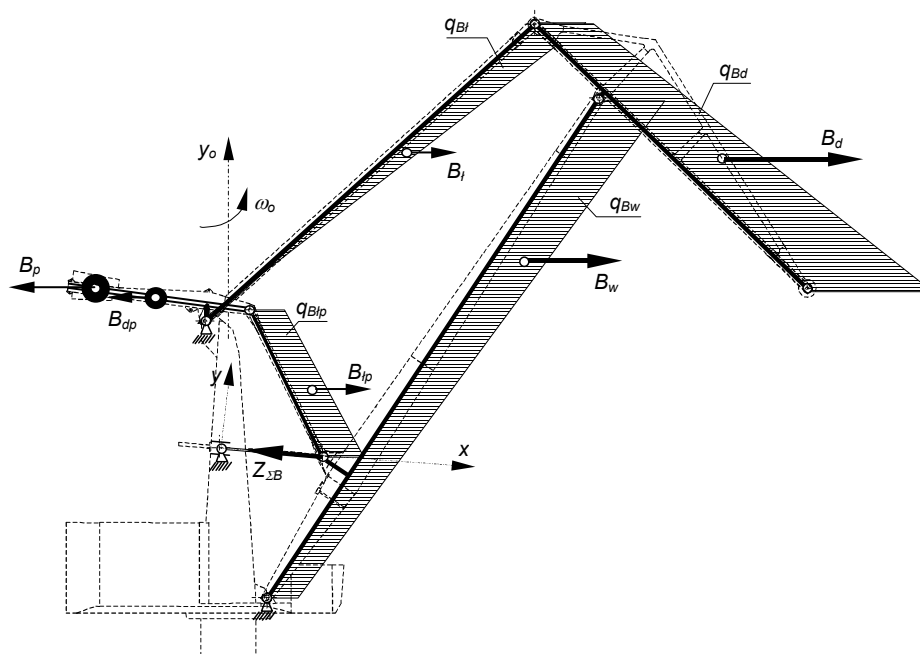
Program umożliwia wyznaczanie obciążeń mechanizmu wypadu dla różnych ładunków i prędkości kątowych żurawia w całym zakresie pracy.

Wypadkową siłę  $Z_w$  stanowiącą opory ruchu mechanizmu wypadu zredukowane do osi śruby lub siłownika przedstawiono w postaci sumy:

$$Z_w = Z + Z_H \quad (8.2)$$

$Z$  - opór ruchu wywołany ciężarami elementów układu wypadowego i ładunku oraz siłami bezwładności przy obrocie,

$Z_H$  - opór ruchu wywołany składową poziomą  $H_w$  siły w linach ładunku działającą w płaszczyźnie wypadu.



Rys. 8.4. Schemat wyznaczania obciążeń mechanizmu wypadu wywołanych ruchem mechanizmu obrotu.

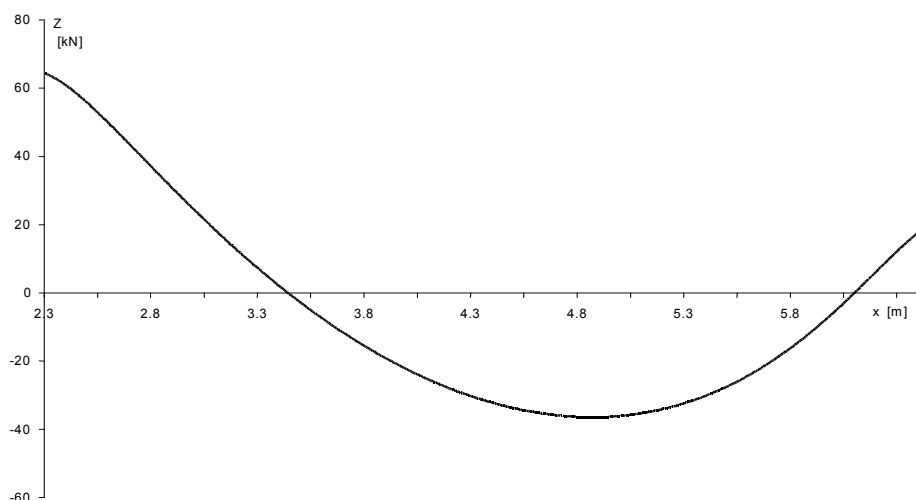
Związek między siłami  $Z_H$  i  $H_w$  opisać można zależnością (8.3).

$$Z_H = H_w \cdot i_w \quad (8.3)$$

$i_w = \frac{v_w}{v_z}$  - przełożenie układu wypadowego (stosunek prędkości krążka

szczytowego  $v_w$  w kierunku wypadu do odpowiadającej jej prędkości śruby lub siłownika wypadu  $v_z$ ) zależne od długości  $x$  śruby lub siłownika.

Na rys. 8.5 przedstawiono przykładowy przebieg siły  $Z$  w śrubie lub siłowniku w zależności od jego długości  $x$ , proporcjonalnej do wysięgu żurawia  $R$  dla ładunku o masie  $m_Q = 16000$  kg i stałej prędkości mechanizmu obrotu  $\omega_o$ .



Rys. 8.5. Przykładowy przebieg siły Z w śrubie mechanizmu wypadu w funkcji długości śruby lub siłownika x.

Można zauważyć, że w czasie zmiany wysięgu przy ruchu obrotowym śruba lub siłownik podlega rozciąganiu i ścisłaniu

Dla mechanizmu obrotu program umożliwia określanie zredukowanego momentu oporów  $M_o$  działającego w osi obrotu żurawia, pochodzącego od siły poziomej  $H_o$  spowodowanej wychyleniem lin ładunku w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do płaszczyzny wypadu. Wartość tego momentu wynosi

$$M_o = H_o \cdot R = c_Q \cdot x_Q \cdot R \quad (8.4)$$

$x_Q$  - odchylenie ładunku od pionu w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wypadu,

$R$  - wysięg żurawia.

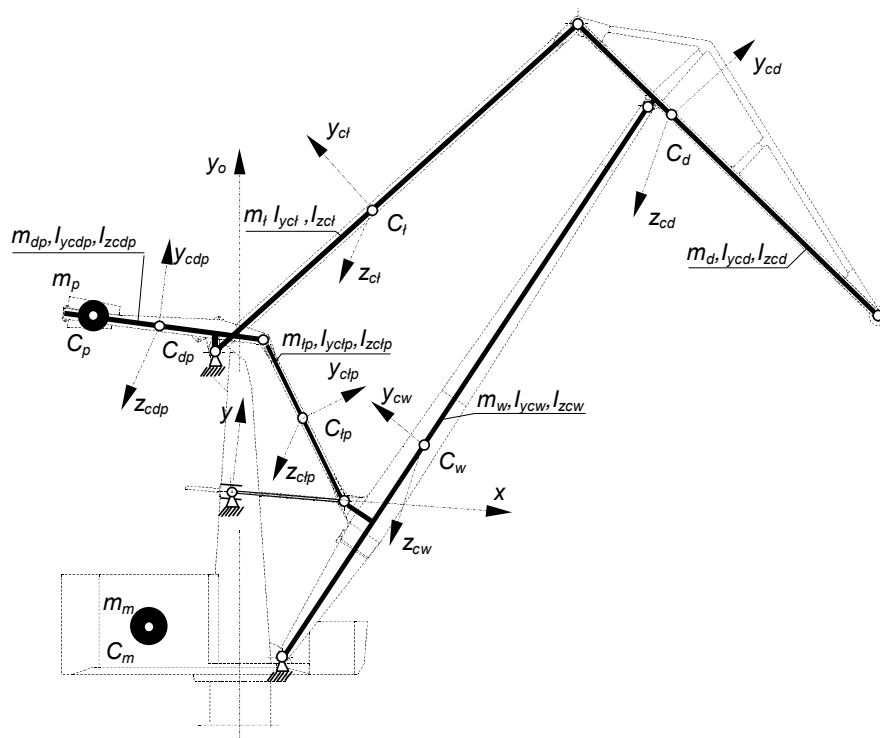
Dla mechanizmu wypadu wyznaczono zredukowaną masę  $m_z$  wszystkich elementów ruchomego układu wypadowego do osi śruby lub siłownika, a dla mechanizmu obrotu wyznaczono zredukowany moment bezwładności  $I_o$  wszystkich elementów obracających się względem osi obrotu  $y_o$  żurawia. Na rys. 8.6. przedstawiono schemat wyznaczania parametrów masowych dla mechanizmu obrotu i wypadu.

Przy wyznaczaniu masy zredukowanej  $m_z$  dla mechanizmu wypadu uzależniono jej wartość od aktualnej długości śruby lub siłownika x.

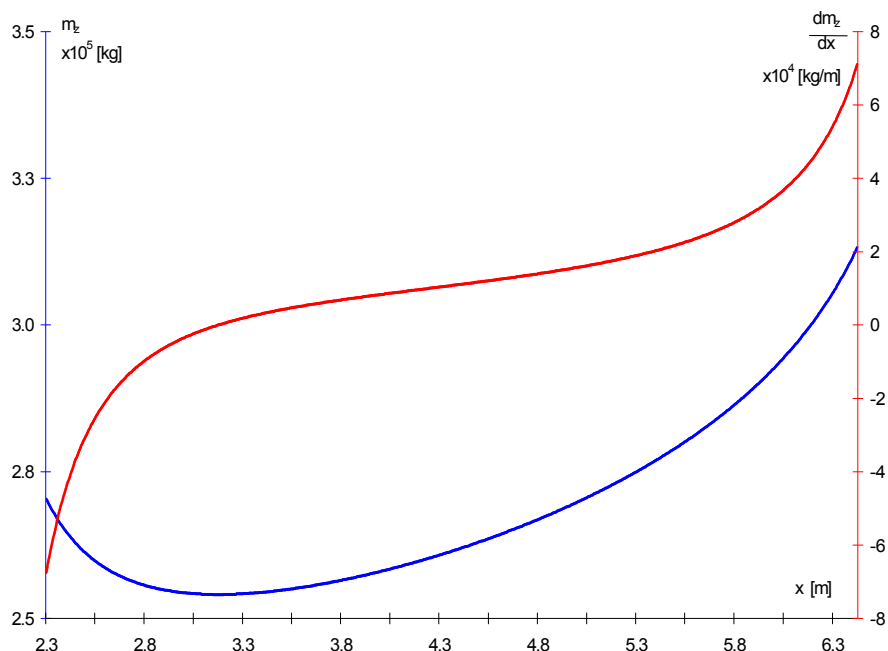


Możliwe jest także określenie pochodnej tej masy względem długości śruby lub siłownika  $\frac{dm_z}{dx}$ .

Podobne postępowanie przeprowadzono przy wyznaczaniu momentu bezwładności  $I_o$  względem osi obrotu  $y_o$  uzależniając jego wartość od położenia wysięgnika określonego aktualną długością śruby lub siłownika  $x$  i określając pochodną  $\frac{dI_o}{dx}$ .



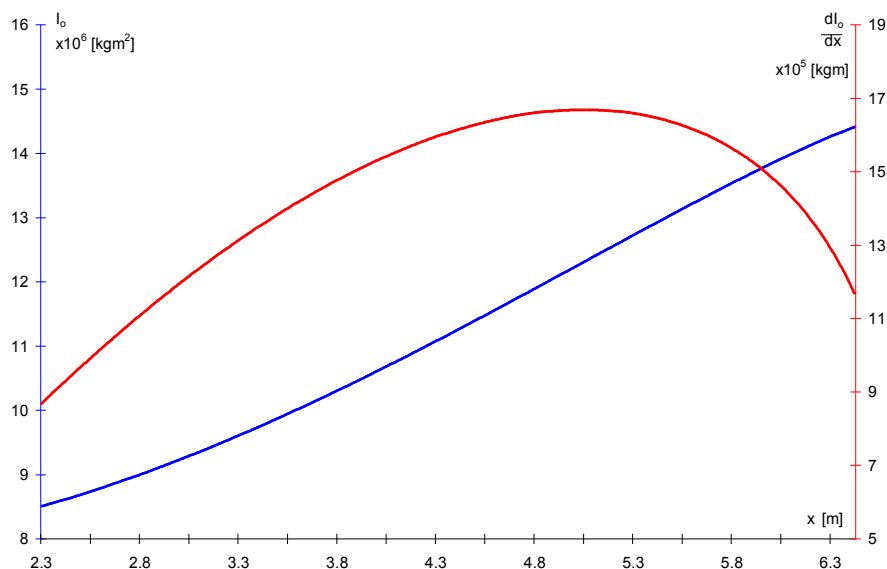
Rys. 8.6. Schemat wyznaczenia parametrów masowych mechanizmu obrotu i wypadu.



Rys. 8.7. Przebieg masy zredukowanej  $m_z$  i jej pochodnej  $\frac{dm_z}{dx}$  w zależności od długości śruby lub siłownika  $x$ .

Na rysunkach 8.7 i 8.8 przedstawiono przebiegi mas zredukowanych i ich pochodnych odpowiednio dla mechanizmu wypadu i obrotu w funkcji długości śruby  $x$ , proporcjonalnej do wysięgu  $R$  żurawia.

Wyniki badań przedstawione na rysunkach 8.7 i 8.8 wskazują, że układ dynamiczny złożony z mechanizmów obrotu i wypadu żurawia jest układem o zmiennych parametrach. Sprowadzono go do układu stacjonarnego uzależniając zmienne parametry masowe od długości śruby lub siłownika  $x$  będącej zmienną stanu modelu. Parametr układu zależny od zmiennej stanu prowadzi do modelu nieliniowego.



Rys. 8.8. Przebieg momentu bezwładności  $I_o$  i jego pochodnej  $\frac{dI_o}{dx}$  w zależności od długości śruby lub siłownika  $x$ .

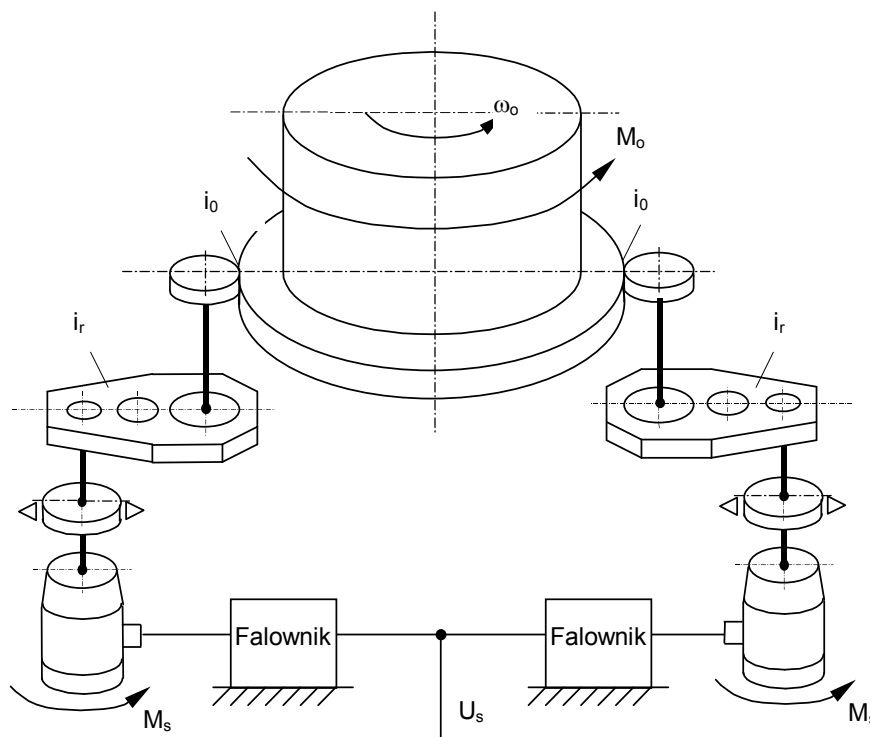
### 8.3. Układy napędowe i sterownicze.

Mechanizmy obrotu i wypadu pracującego żurawia portowego wyposażone są w elektromechaniczne napędy z silnikami asynchronicznymi, zasilanymi z falowników. Zaprojektowano również drugą wersję napędów hydrostatycznych pracujących w systemie sterowania wtórnego z jednostkami zasilanymi ze stałociśnieniowej sieci hydraulicznej.

Obydwa mechanizmy w obydwu wersjach posiadają układy sterowania umożliwiające ich współpracę z układami regulacji położenia.

### 8.3.1. Falownikowy układ napędowy mechanizmu obrotu.

Schemat mechanizmu obrotu z elektromechanicznym napędem falownikowym pokazano na rys. 8.9.

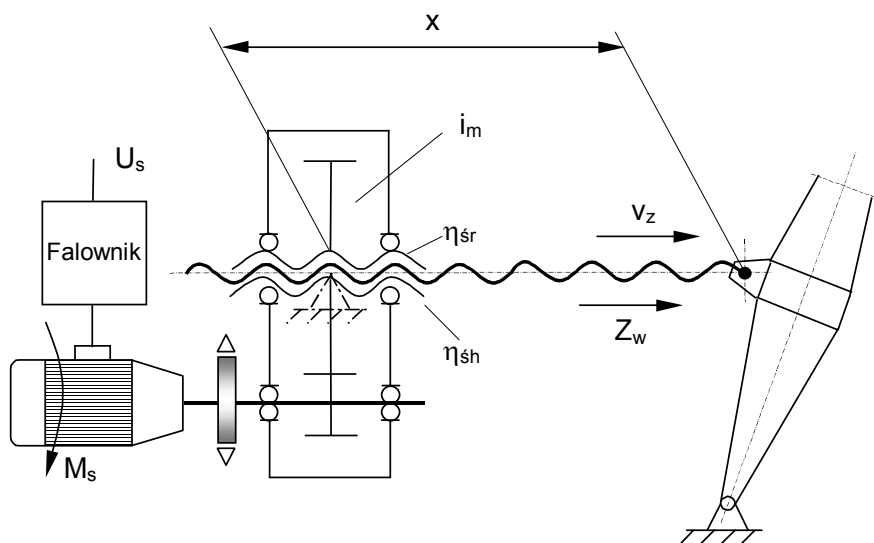


Rys. 8.9. Schemat mechanizmu obrotu z napędem falownikowym.

Dwa silniki elektryczne asynchroniczne zwarte o mocy znamionowej  $N_{zn} = 32 \text{ kW}$  każdy i prędkości synchronicznej  $n_s = 750 \text{ obr/min}$  współpracują z falownikami posiadającymi możliwość oddawania energii do sieci elektrycznej. Silniki napędzają część obrotową żurawia poprzez reduktory o przełożeniu  $i_r = 35$  oraz przekładnię otwartą o przełożeniu  $i_0 = 14,4$ .

### 8.3.2. Falownikowy układ napędowy mechanizmu wypadu.

Schemat mechanizmu wypadu z elektromechanicznym napędem falownikowym pokazano na rys. 8.10.

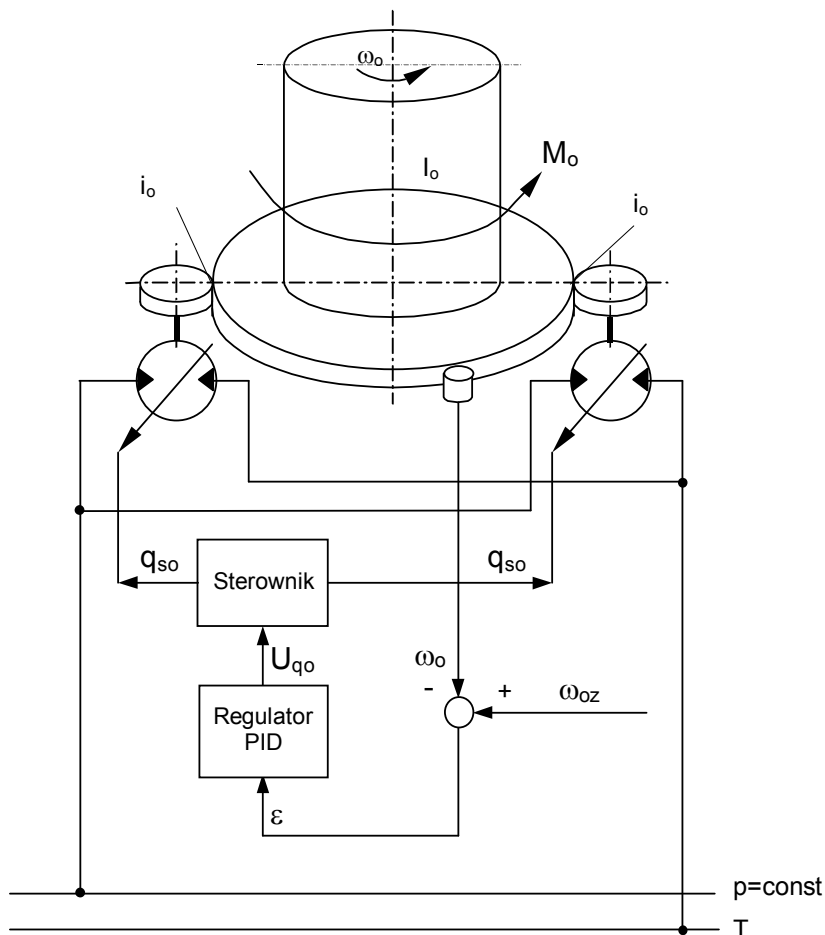


Rys. 8.10. Schemat mechanizmu wypadu z napędem falownikowym.

Siłownik mechanizmu wypadu stanowi śruba o długości roboczej 4126 mm i skoku gwintu 56 mm. Długość śruby zmieniana jest za pomocą nakrętki związanej z wolnobieżnym wałem reduktora o przełożeniu  $i_m = 5,17$  napędzanego przez silnik elektryczny asynchroniczny zwarty DRK 280 M o mocy znamionowej  $N_{zn} = 40$  kW o prędkości synchronicznej  $n_s = 750$  obr/min współpracujący z falownikiem.

### 8.3.3. Hydrostatyczny układ napędowy mechanizmu obrotu.

Schemat, zaprojektowanego dla celów badawczych, mechanizmu obrotu z napędem hydrostatycznym zasilanego z sieci stałociśnieniowej w systemie sterowania wtórnego pokazano na rys. 8.11.

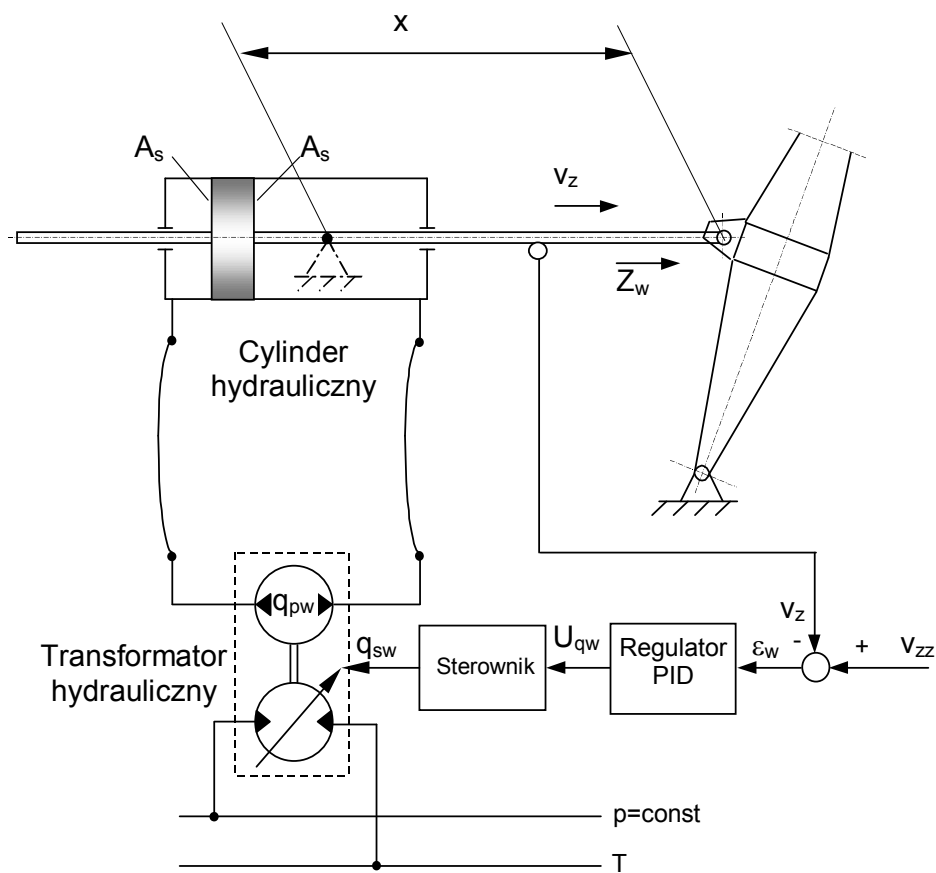


Rys. 8.11. Schemat mechanizmu obrotu z napędem hydrostatycznym.

Dwa równolegle połączone silniki hydrostatyczne o zmiennej chłonności jednostkowej, przystosowane do współpracy ze stałociśnieniową siecią hydrauliczną ( $p_o = 31,5 \text{ MPa}$ ), napędzają część obrotową żurawia poprzez otwartą przekładnię zewnętrzną o przełożeniu  $i_o = 14,4$ . Chłonności obu silników zmieniane są przez sterownik współpracujący z regulatorem prędkości typu PID, który jest niezbędny w systemie sterowania wtórnego. Maksymalna chłonność każdego silnika wynosi  $q_{\text{somax}} = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{rad}$ .

8.3.4. Hydrostatyczny układ napędowy mechanizmu wypadu.

Schemat zaprojektowanego hydrostatycznego mechanizmu wypadu zasilanego ze stałociśnieniowej sieci hydraulicznej pokazano na rys. 8.12.



Rys. 8.12. Schemat mechanizmu wypadu z napędem hydrostatycznym.

Do napędu mechanizmu wypadu użyto cylindra hydraulicznego dwustronnego działania o powierzchni czynnej każdej ze stron tłoka  $A_s = 0,02 \text{ m}^2$ . Powierzchnię czynną tłoka siłownika  $A_s$  dobrano biorąc pod

uwagę konieczność zrównoważenia przez siłownik obciążenia siłą oporów  $Z$  zredukowaną do osi siłownika dla wiatru stanu burzowego i analizując obciążenie siłownika w całym zakresie zmiany wysięgu.

Ponieważ do współpracy z siecią stałociśnieniową wymagane są jednostki o zmiennych objętościach jednostkowych, w układzie napędowym zastosowano transformator hydrauliczny składający się z pompy o stałej chłonności  $q_{pw} = 19,24 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{rad}$ , pracującej w obiegu zamkniętym z cylindrem. Na wale pompy umieszczony jest silnik o zmiennej chłonności ( $q_{swmax} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{rad}$ ) przystosowany do współpracy ze stałociśnieniową siecią hydrauliczną ( $p_w = 31,5 \text{ MPa}$ ). Zmianą chłonności silnika hydraulicznego steruje układ regulacji prędkości siłownika zawierający regulator PID.

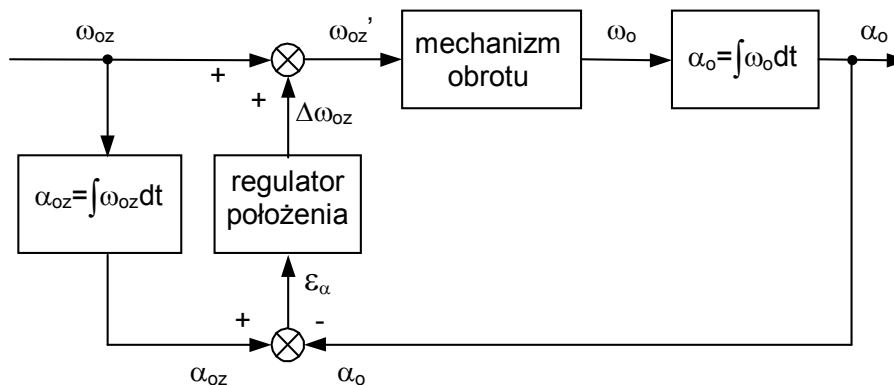
#### 8.3.5. Układy sterownicze.

Oba typy układów napędowych mechanizmu obrotu i wypadu z elektromechanicznym napędem falownikowym oraz z napędem hydrostatycznym zasilanym z sieci stałociśnieniowej w systemie sterowania wtórnego posiadają w swojej strukturze układy regulacji prędkości.

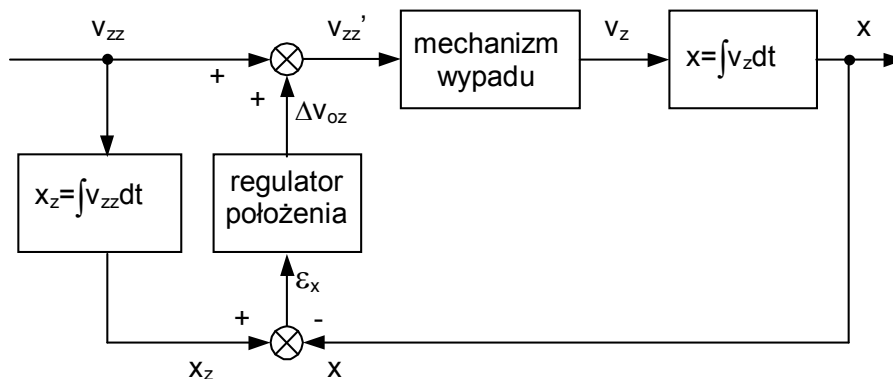
Badania symulacyjne i eksperymentalne innych mechanizmów wykazały, że sam układ regulacji prędkości nie zapewnia dojazdu członów końcowych mechanizmów do zadanego położenia z zadaną dokładnością w warunkach działania zakłóceń. Niezbędny jest, działający w sposób ciągły, układ regulacji przemieszczenia, który w każdej chwili porównuje przemieszczenie zadane z przemieszczeniem rzeczywistym mechanizmu. Struktura takiego układu została opisana w rozdziale 6.1 i pokazana na rys. 6.1. Schematy układów sterowniczych mechanizmów obrotu i wypadu żurawia pokazano na rysunkach 8.13. i 8.14.

- $\omega_{oz}$  - zadana prędkość kątowna części obrotowej żurawia,
- $\alpha_{oz}$  - zadane położenie kątowne części obrotowej żurawia,
- $\omega_o$  - rzeczywista prędkość kątowna części obrotowej żurawia,
- $\alpha_o$  - rzeczywiste położenie kątowne części obrotowej żurawia.





Rys. 8.13. Schemat układu sterowania mechanizmu obrotu.



Rys. 8.14. Schemat układu sterowania mechanizmu wypadu.

- $v_{zz}$  - zadana prędkość śruby lub siłownika mechanizmu wypadu,
- $x_z$  - zadana długość śruby lub siłownika mechanizmu wypadu,
- $v_z$  - rzeczywista prędkość śruby lub siłownika mechanizmu wypadu,
- $x$  - rzeczywista długość śruby lub siłownika mechanizmu wypadu.

W rozwiązaniach technicznych układ regulacji położenia realizowany jest przez pracujące w czasie rzeczywistym mikroprocesorowe sterowniki programowalne.

#### **8.4. Model dynamiczny ruchów skojarzonych obrotu i wypadu.**

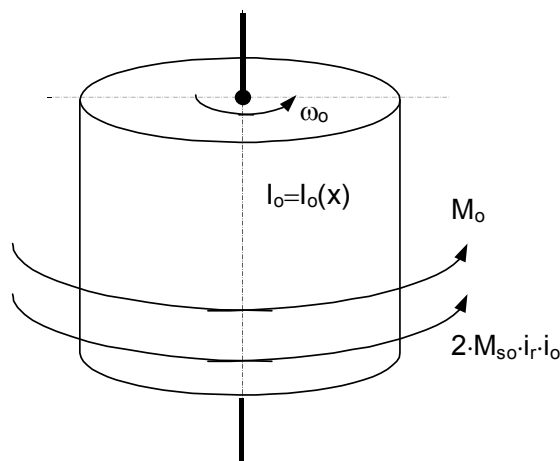
Zbudowany został model dynamiczny żurawia opisujący transport ładunku w płaszczyźnie poziomej przy skojarzonych ruchach obrotu i wypadu, obejmujący mechanizm obrotu i wypadu wraz z układami regulacji prędkości i przemieszczenia dla wersji elektromechanicznej i hydrostatycznej oraz zawieszony wiotko na linach zaczepionych do krążka szczytowego, ładunek. Dla każdego fragmentu modelu utworzono opis matematyczny w przestrzeni zmiennych stanu.

Założono, że układ wypadowy jest sztywny, tzn. dla każdego jego położenia określonego długością śruby lub siłownika  $x$  istnieje jeden odpowiadający jej i znany wysięg żurawia  $R$  oraz jedno znane przełożenie układu  $i_w$  określające stosunek prędkości krążka szczytowego  $v_w$  w kierunku wypadu do odpowiadającej jej prędkości  $v_z$  śruby w miejscu połączenia z nakrętką lub tłoczyska siłownika w miejscu jego połączenia z konstrukcją części obrotowej.

Przyjęto również założenie, że część obrotowa żurawia jest sztywna, tzn. dla każdego położenia układu wypadowego określonego długością  $x$  i odpowiadającego jej wysięgu żurawia  $R$ , istnieje ścisła i jednoznaczna zależność między prędkością kątową części obrotowej  $\omega_o$  oraz prędkością liniową krążka szczytowego w kierunku obrotu  $v_o$  ( $v_o = R \cdot \omega_o$ ).

##### 8.4.1. Model elektromechanicznego mechanizmu obrotu.

Model mechanizmu obrotu żurawia z napędem elektromechanicznym składa się z dwóch części: mechanicznej oraz napędowej. Model części mechanicznej pokazano na rys. 8.15.



Rys. 8.15. Model dynamiczny części mechanicznej elektromechanicznego mechanizmu obrotu.

Część obrotową żurawia potraktowano jako jednorodną bryłę o zmiennym momencie bezwładności  $I_0$ , posiadającą możliwość obrotu wokół osi pionowej. Moment bezwładności części obrotowej obejmuje zredukowane do osi obrotu żurawia masy uogólnione elementów związanych z częścią obrotową, w tym elementów układu wypadowego, które zmieniają swoje położenie względem osi obrotu, oraz elementy napędowe mechanizmów, jak wirniki silników, sprzęgła, koła zębate w reduktorach. Moment bezwładności  $I_0$  jest zmienny i zależy od długości  $x$  śruby (lub siłownika) mechanizmu wypadu. W opisie matematycznym wykorzystano równania opisujące pochodną krętu ciała obracającego się wokół nieruchomej osi.

Określone zostały następujące parametry i wielkości zakłócające modelu:

- $I_0$  - zredukowany do osi obrotu moment bezwładności elementów związanych z częścią obrotową żurawia jako funkcja długości śruby mechanizmu wypadu  $x$ ,
- $i_r$  - przełożenie reduktora zamkniętego mechanizmu obrotu,
- $i_0$  - przełożenie przekładni otwartej mechanizmu obrotu,
- $M_0$  - moment oporów ruchu części obrotowej zależny od wychylenia lin ładunku.

Wybrano zmienną stanu modelu:

$\omega_o$  - prędkość kątowna części obrotowej.

Wielkością sterującą jest moment napędowy  $M_{so}$  jednego silnika elektrycznego mechanizmu obrotu.

Równanie ruchu części obrotowej ma postać (8.5).

$$\frac{d}{dt}(I_o \cdot \omega_o) = 2 \cdot M_{so} \cdot i_r \cdot i_o - M_o \quad (8.5)$$

$$\frac{dI_o}{dt} \cdot \omega_o + I_o \cdot \frac{d\omega_o}{dt} = 2 \cdot M_{so} \cdot i_r \cdot i_o - M_o$$

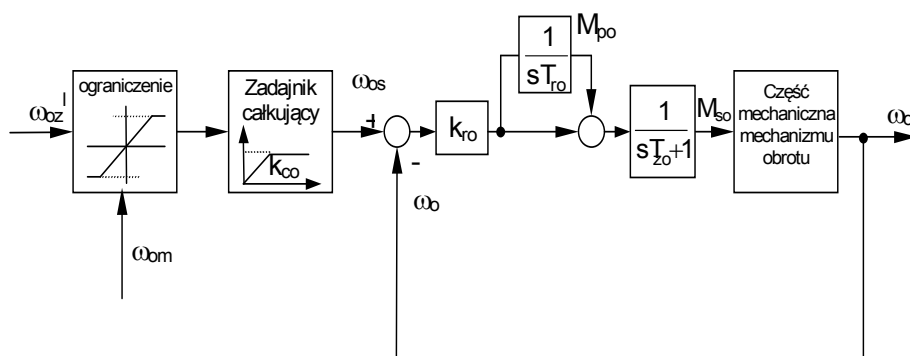
Po uzależnieniu pochodnej momentu bezwładności  $I_o$  od długości śruby  $x$  równanie przyjmuje postać (8.6).

$$\frac{dI_o}{dt} = \frac{dI_o}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dI_o}{dx} \cdot v_z \quad (8.6)$$

$$\frac{d\omega_o}{dt} = \frac{2 \cdot i_r \cdot i_o}{I_o} \cdot M_{so} - \frac{1}{I_o} \cdot M_o - \frac{1}{I_o} \cdot \frac{dI_o}{dx} \cdot v_z \cdot \omega_o$$

$v_z$  - prędkość śruby w miejscu połączenia z nakrętką będąca zmienną stanu w modelu wypadowego.

Model części napędowej pokazano na rys. 8.16. Obejmuje on człon ograniczający, falownik wraz z integralnie związanym z nim układem regulacji prędkości i zadajnikiem całkującym oraz stojan silnika elektrycznego.



Rys. 8.16. Model dynamiczny układu napędowego elektromechanicznego mechanizmu obrotu.

Określone zostały następujące parametry modelu układu napędowego:

- $\omega_{om}$  - maksymalna prędkość kątowna części obrotowej,
- $k_{co}$  - stała zadajnika całkującego mechanizmu obrotu,
- $k_{ro}$  - współczynnik wzmocnienia regulatora prędkości,
- $T_{ro}$  - stała czasowa regulatora prędkości mechanizmu obrotu,
- $T_{zo}$  - stała czasowa falownika mechanizmu obrotu.

Wybrano następujące zmienne stanu modelu układu napędowego:

- $M_{so}$  - moment napędowy silnika mechanizmu obrotu,
- $M_{po}$  - fikcyjny moment pomocniczy silnika mechanizmu obrotu,
- $\omega_{os}$  - sygnał wyjściowy prędkości z zadajnika całkującego stanowiący jednocześnie sygnał wejściowy układu regulacji prędkości.

Wielkością sterującą jest zadana prędkość kątowna mechanizmu obrotu żurawia  $\omega_{oz}^l$ .

Opis matematyczny modelu falownikowego układu napędowego został omówiony w rozdziale 6.1 i w rozważanym przypadku ma postać (8.7).

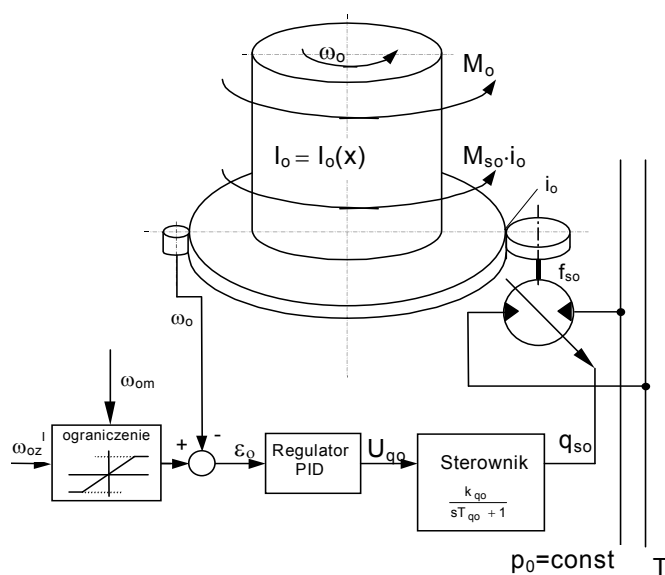
$$\begin{aligned} \frac{dM_{so}}{dt} &= \frac{1}{T_{zo}} \cdot (M_{po} - M_{so}) + \frac{k_{ro}}{T_{zo}} \cdot (\omega_{os} - \omega_o) \\ \frac{dM_{po}}{dt} &= \frac{k_{ro}}{T_{ro}} \cdot (\omega_{os} - \omega_o) \\ \frac{d\omega_{os}}{dt} &= k_{co} \cdot \text{sign}(\omega_{oz}^l - \omega_{os}) \quad \left| \omega_{oz}^l \right| \leq \omega_{om} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Wykorzystując zależności (8.6) i (8.7) można przedstawić opis matematyczny modelu elektromechanicznego mechanizmu obrotu w przestrzeni zmiennych stanu w postaci (8.8).

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_o}{dt} &= \frac{2 \cdot i_r \cdot i_o}{I_o} \cdot M_{so} - \frac{1}{I_o} \cdot M_o - \frac{1}{I_o} \cdot \frac{dl_o}{dx} \cdot v_z \cdot \omega_o \\ \frac{dM_{so}}{dt} &= \frac{1}{T_{zo}} \cdot (M_{po} - M_{so}) + \frac{k_{ro}}{T_{zo}} \cdot (\omega_{os} - \omega_o) \\ \frac{dM_{po}}{dt} &= \frac{k_{ro}}{T_r} \cdot (\omega_{os} - \omega_o) \\ \frac{d\omega_{os}}{dt} &= k_{co} \cdot \text{sign}(\omega_{oz}^l - \omega_{os}) \quad \left| \omega_{oz}^l \right| \leq \omega_{om} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Wielkością wejściową dla modelu jest zadana prędkość kątowna mechanizmu obrotu żurawia  $\omega_{oz}^l$  ograniczona do wartości  $\omega_{om}$ , wielkość zakłócającą stanowi zmienny, zależny od wychylenia lin ładunku, moment oporów ruchu części obrotowej  $M_o$ .

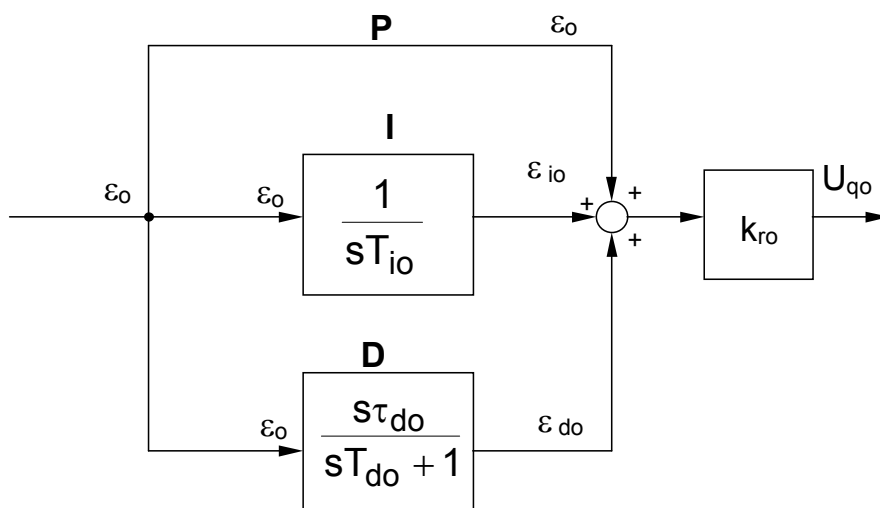
#### 8.4.2. Model hydrostatycznego mechanizmu obrotu.



Rys. 8.17. Model dynamiczny hydrostatycznego mechanizmu obrotu.

Model dynamiczny mechanizmu obrotu z napędem hydrostatycznym zasilanym ze stałociśnieniowej sieci hydraulicznej pokazano na rys. 8.17.

W modelu można wyróżnić część mechaniczną: potraktowaną jako bryłę o zmiennym momencie bezwładności  $I_o$  obracającą się wokół osi pionowej z prędkością obrotową żurawia, część napędową: zawierającą silnik hydrostatyczny o zmiennej chłonności wraz ze sterownikiem zamodelowanym jako człon inercyjny pierwszego rzędu oraz regulator proporcjonalny, całkujący i różniczkujący PID. Schemat rzeczywistego regulatora PID pokazano na rys. 8.18.



Rys. 8.18. Schemat regulatora PID.

Założono, że sieć stałociśnieniowa jest idealna, tzn. ciśnienie  $p_o$  jest stałe niezależnie od ilości oleju pobieranego do napędu mechanizmu.

Określone zostały następujące parametry i wielkości zakłócające modelu:

- $I_o$  - zredukowany do osi obrotu moment bezwładności elementów związanych z częścią obrotową żurawia jako funkcja długości siłownika mechanizmu wypadu  $x$ ,
- $i_o$  - przełożenie przekładni otwartej mechanizmu obrotu

- $M_o$  - moment oporów ruchu części obrotowej zależny od wychylenia lin ładunku,
- $\omega_{om}$  - maksymalna prędkość kątowna części obrotowej,
- $q_{som}$  - sumaryczna maksymalna chłonność jednostkowa silników hydrostatycznych mechanizmu obrotu,
- $f_{so}$  - sumaryczny współczynnik tłumienia silników hydraulicznych,
- $p_o$  - ciśnienie nominalne sieci stałociśnieniowej,
- $T_{io}$  - stała czasowa członu całkującego w regulatorze,
- $T_{do}$  - stała czasowa pomocnicza członu różniczkującego w regulatorze,
- $\tau_{do}$  - stała czasowa członu różniczkującego w regulatorze,
- $k_{ro}$  - współczynnik wzmocnienia regulatora PID,
- $T_{qo}$  - stała czasowa sterownika chłonności silnika hydraulicznego,
- $k_{qo}$  - współczynnik wzmocnienia sterownika.

Wybrano następujące zmienne stanu modelu:

- $\omega_o$  - prędkość kątowna części obrotowej,
- $q_{so}$  - sumaryczna chłonność jednostkowa silników hydraulicznych,
- $\varepsilon_{io}$  - sygnał wyjściowy członu całkującego w regulatorze,
- $\varepsilon_{do}$  - sygnał wyjściowy członu różniczkującego w regulatorze.

Wielkością sterującą jest zadana prędkość kątowna mechanizmu obrotu żurawia  $\omega_{oz}^l$  ograniczona do wartości  $\omega_{om}$ .

Równanie ruchu części obrotowej żurawia ma postać (8.9) zbliżoną do (8.6).

$$I_o \cdot \frac{d\omega_o}{dt} = M_{so} \cdot i_o - M_o - \frac{dl_o}{dx} \cdot v_z \cdot \omega_o \quad (8.9)$$

$v_z$  - prędkość tłoka siłownika mechanizmu wypadu w miejscu połączenia cylindra z konstrukcją stalową części obrotowej, będąca zmienną stanu w modelu układu wypadowego,

$x$  - długość siłownika mechanizmu wypadu,

$M_{so} = p_o \cdot q_{so} - f_{so} \cdot i_o \cdot \omega_o$  - sumaryczny moment napędowy silników hydraulicznych mechanizmu obrotu.

Równanie członu całkującego w regulatorze ma postać (8.10).

$$\frac{d\varepsilon_{io}}{dt} = \frac{1}{T_{io}} \cdot \varepsilon_o \quad (8.10)$$



$\varepsilon_o = \omega_{oz}^l - \omega_o$  - uchyb między zadaną i rzeczywistą prędkością kątową części obrotowej żurawia.

Równanie członu różniczkującego w regulatorze ma postać (8.11).

$$\tau_{do} \cdot \frac{d\varepsilon_o}{dt} = T_{do} \cdot \frac{d\varepsilon_{do}}{dt} + \varepsilon_{do} \quad (8.11)$$

$$\frac{d\varepsilon_o}{dt} = \frac{d\omega_{oz}^l}{dt} - \frac{d\omega_o}{dt}$$

Sygnał wyjściowy z regulatora  $U_{qo}$  będący jednocześnie sygnałem wejściowym dla sterownika chłonności silnika można wyrazić zależnością (8.12).

$$U_{qo} = k_{ro} \cdot (\varepsilon_o + \varepsilon_{io} + \varepsilon_{do}) = k_{ro} \cdot (\omega_{oz}^l - \omega_o + \varepsilon_{io} + \varepsilon_{do}) \quad (8.12)$$

Równanie sterownika chłonności jednostkowej silnika hydraulicznego ma postać (8.13).

$$T_{qo} \cdot \frac{dq_{so}}{dt} + q_{so} = k_{qo} \cdot U_{qo} \quad |q_{so}| \leq q_{som} \quad (8.13)$$

Wykorzystując zależności (8.9) ÷ (8.13) można sformułować opis matematyczny modelu hydrostatycznego mechanizmu obrotu w przestrzeni zmiennych stanu w postaci (8.14).

$$\frac{d\omega_o}{dt} = \frac{p_o \cdot i_o}{l_o} \cdot q_{so} - \frac{f_{so} \cdot i_o^2}{l_o} \cdot \omega_o - \frac{1}{l_o} \cdot M_o - \frac{1}{l_o} \cdot \frac{dl_o}{dx} \cdot v_z \cdot \omega_o$$

$$\frac{dq_{so}}{dt} = -\frac{1}{T_{qo}} \cdot q_{so} + \frac{k_{qo} \cdot k_{ro}}{T_{qo}} \cdot (\omega_{oz}^l - \omega_o + \varepsilon_{io} + \varepsilon_{do}) \quad |q_{so}| \leq q_{som}$$

$$\frac{d\varepsilon_{io}}{dt} = \frac{1}{T_{io}} \cdot (\omega_{oz}^l - \omega_o) \quad |\omega_{oz}^l| \leq \omega_{om}$$

$$\frac{d\varepsilon_{do}}{dt} = -\frac{1}{T_{do}} \cdot \varepsilon_{do} +$$

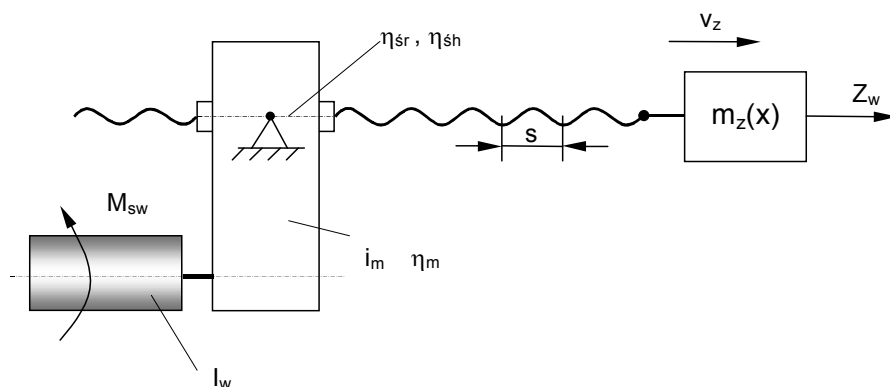
$$+ \frac{\tau_{do}}{T_{do}} \cdot \left( \frac{d\omega_{oz}^l}{dt} - \frac{p_o \cdot i_o}{l_o} \cdot q_{so} + \frac{f_{so} \cdot i_o^2}{l_o} \cdot \omega_o + \frac{1}{l_o} \cdot M_o + \frac{1}{l_o} \cdot \frac{dl_o}{dx} \cdot v_z \cdot \omega_o \right) \quad (8.14)$$

Wielkością wejściową dla modelu jest zadana prędkość kątowa mechanizmu obrotu żurawia  $\omega_{oz}^l$  ograniczona do wartości  $\omega_{om}$ , wielkość

zakłócającą stanowi zmienny, zależny od wychylenia lin ładunku, moment oporów ruchu części obrotowej  $M_o$ .

#### 8.4.3. Model elektromechanicznego mechanizmu wypadu.

Podobnie, jak w mechanizmie obrotu z napędem falownikowym, w modelu elektromechanicznego mechanizmu wypadu wyróżnić można dwie części: mechaniczną i napędową. Schemat modelu dynamicznego części mechanicznej pokazano na rys. 8.19.



Rys. 8.19. Schemat modelu dynamicznego części mechanicznej elektromechanicznego mechanizmu wypadu.

Układ wypadowy żurawia potraktowany został jako ciało o masie zredukowanej  $m_z$ , które porusza się wzdłuż osi śruby z jej prędkością  $v_z$  w miejscu połączenia z nakrętką. Opory ruchu układu zostały zredukowane do osi śruby w postaci siły  $Z_w$ . Zarówno masa  $m_z$  i siła  $Z_w$  są zależne od długości śruby mechanizmu wypadu  $x$ , a sposób ich wyznaczania został omówiony w rozdziale 8.2. Z uwagi na fakt, że siła w śrubie mechanizmu wypadu zmienia znak, uwzględniono dwa kierunki przepływu energii przez reduktor i przekładnię śrubową.

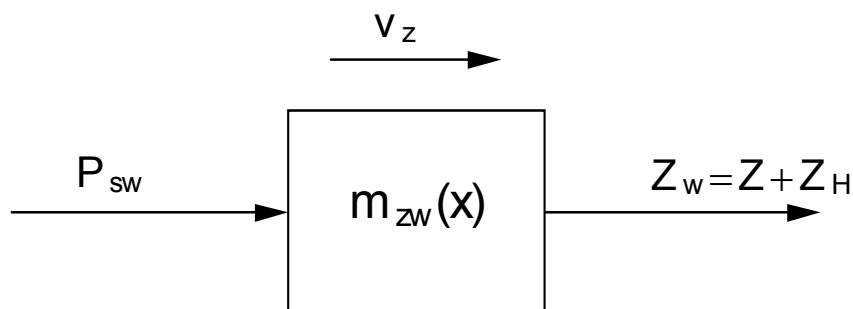
Określone zostały następujące parametry i wielkości zakłócające modelu:

$m_z$  - zredukowana do osi śruby masa wszystkich elementów układu wypadowego,

- $I_w$  - moment bezwładności elementów obrotowych mechanizmu wypadu na wale silnika elektrycznego,
- $Z_w$  - zredukowana do osi śruby siła oporów ruchu mechanizmu wypadu,
- $R_z$  - promień zastępczy mechanizmu wypadu,
- $i_m$  - przełożenie przekładni zębatej mechanizmu wypadu,
- $s$  - skok śruby mechanizmu wypadu,
- $\eta_m$  - sprawność przekładni zębatej mechanizmu wypadu,
- $\eta_{sr}$  - sprawność przekładni śrubowej mechanizmu wypadu przy napędzie od strony nakrętki,
- $\eta_{sh}$  - sprawność przekładni śrubowej mechanizmu wypadu przy napędzie od strony śruby.

Jako zmienną stanu wybrano prędkość  $v_z$  śruby w miejscu jej połączenia z nakrętką, wymuszenie dla części mechanicznej stanowi moment napędowy  $M_{sw}$  silnika elektrycznego, będący jednocześnie zmienną stanu w modelu części napędowej, wielkością zakłócającą jest siła oporów ruchu  $Z_w$ .

Wszystkie wielkości związane z modelem zostały zredukowane do osi śruby mechanizmu wypadu. Wyjaśnia to rys. 8.20.



Rys. 8.20. Model części mechanicznej zredukowany do osi śruby.

Zredukowana do osi śruby masa wszystkich elementów ruchomych mechanizmu wypadu  $m_{zw}$  jest zmienna i została wyznaczona w oparciu o zasadę zachowania energii kinetycznej. Dlatego równanie ruchu części mechanicznej ma postać (8.15) i zawiera człon zależny od pochodnej  $\frac{dm_{zw}}{dt}$ .

$$m_{zw} \cdot \frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_{zw}}{dt} \cdot v_z = P_{sw} + Z_w \quad Z_w = Z + Z_H \quad (8.15)$$

$m_{zw} = m_z + \frac{I_w}{R_z^2} \cdot \eta_m \cdot \eta_{sr}$  - zredukowana do osi śruby masa wszystkich elementów ruchomych mechanizmu wypadu przy napędzie od strony nakrętki,

$m_{zw} = m_z + \frac{I_w}{R_z^2} \cdot \frac{1}{\eta_m \cdot \eta_{srh}}$  - zredukowana do osi śruby masa wszystkich elementów ruchomych mechanizmu wypadu przy napędzie od strony śruby,

$P_{sw} = \frac{M_{sw}}{R_z} \cdot \eta_m \cdot \eta_{sr}$  - moment napędowy silnika elektrycznego  $M_s$  zredukowany do osi śruby przy napędzie od strony nakrętki,

$P_{sw} = \frac{M_{sw}}{R_z} \cdot \frac{1}{\eta_m \cdot \eta_{srh}}$  - moment napędowy silnika elektrycznego  $M_s$  zredukowany do osi śruby przy napędzie od strony śruby,

$R_z = \frac{s}{2 \cdot \pi \cdot i_m}$  - promień zastępczy mechanizmu wypadu.

Po uzależnieniu masy  $m_{zw}$  od długości śruby  $x$  wyrażenie na pochodną  $\frac{dm_{zw}}{dt}$  przyjmuje postać (8.16). Wiersz górny dotyczy napędu od strony nakrętki, wiersz dolny – napędu od strony śruby.

$$\frac{dm_{zw}}{dt} = \frac{dm_{zw}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left( m_z + \frac{I_w}{R_z^2} \cdot \eta_m \cdot \eta_{sr} \right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dm_z}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dm_z}{dt} \cdot v_z$$

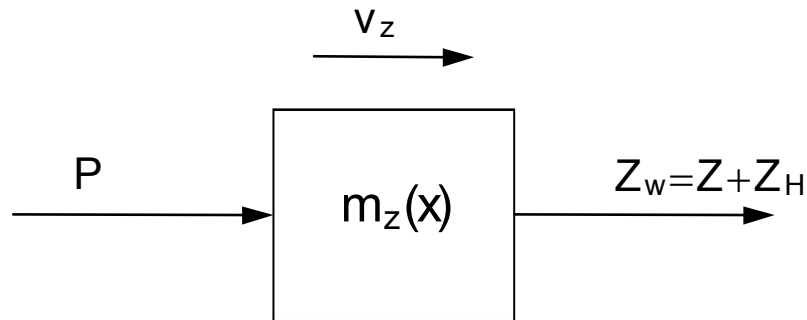
$$\frac{dm_{zw}}{dt} = \frac{dm_{zw}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left( m_z + \frac{I_w}{R_z^2 \cdot \eta_m \cdot \eta_{sr}} \right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dm_z}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dm_z}{dt} \cdot v_z$$

(8.16)

Po wykorzystaniu związku (8.16) w (8.15) otrzymuje się opis matematyczny części mechanicznej w przestrzeni zmiennych stanu.

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{m_{zw}} \cdot (P_{sw} + Z + Z_H) - \frac{1}{2 \cdot m_{zw}} \cdot \frac{dm_z}{dx} \cdot v_z^2 \quad (8.17)$$

W celu określenia kierunku przepływu energii przez reduktor i przekładnię śrubową mechanizmu wypadu określona została chwilowa wartość siły  $P$  w śrubie. Sposób jej wyznaczenia wyjaśnia rys. 8.21.



Rys. 8.21. Schemat dla wyznaczenia chwilowej wartości siły  $P$  w śrubie.

Równanie ruchu ciała o masie  $m_z$ , dla którego siła  $P$  jest siłą napędową ma postać (8.18).

$$m_w \cdot \frac{dv_z}{dt} = P + Z + Z_H - \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_z}{dx} \cdot v_z^2 \quad (8.18)$$

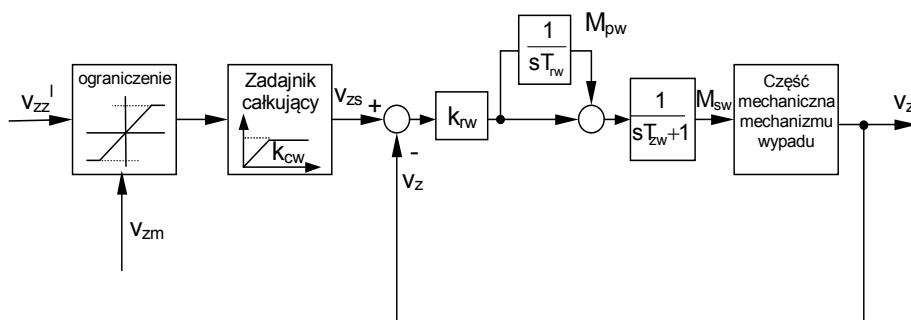
$$P = -Z - Z_H + m_w \cdot \frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_z}{dx} \cdot v_z^2$$

Zgodnie z przyjętym układem odniesienia dodatnia wartość siły  $P$  oznacza ściskanie śruby, ujemna – rozciąganie. Odpowiednia kombinacja znaku siły  $P$  oraz znaku prędkości śruby  $v_z$  pozwala na ustalenie kierunku przepływu energii przez mechanizm.

Jeżeli  $P > 0 \wedge v_z > 0$  lub  $P < 0 \wedge v_z < 0$ , to energia przepływa od nakrętki do śruby (napęd od strony nakrętki).

Jeżeli  $P < 0 \wedge v_z > 0$  lub  $P > 0 \wedge v_z < 0$ , to energia przepływa od śruby do nakrętki (napęd od strony śruby).

Model części napędowej jest analogiczny, jak dla mechanizmu obrotu. Jego schemat pokazano na rys. 8.22.



Rys. 8.22. Model dynamiczny układu napędowego elektromechanicznego mechanizmu wypadu.

Określone zostały następujące parametry modelu układu napędowego:

- $v_{zm}$  - maksymalna prędkość śruby mechanizmu wypadu,
- $k_{CW}$  - stała zadajnika całkującego mechanizmu wypadu,
- $k_{rw}$  - współczynnik wzmocnienia regulatora prędkości,
- $T_{rw}$  - stała czasowa regulatora prędkości mechanizmu wypadu,
- $T_{zw}$  - stała czasowa falownika mechanizmu wypadu.

Wybrano następujące zmienne stanu modelu układu napędowego:

- $M_{sw}$  - moment napędowy silnika mechanizmu wypadu,
- $M_{pw}$  - fikcyjny moment pomocniczy silnika mechanizmu wypadu,
- $v_{zs}$  - sygnał wyjściowy prędkości z zadajnika całkującego stanowiący jednocześnie sygnał wejściowy układu regulacji prędkości.

Wielkością sterującą jest zadana prędkość śruby mechanizmu wypadu w miejscu jej połączenia z nakrętką  $v_{zz}^I$ .

Opis matematyczny modelu falownikowego układu napędowego ma postać (8.19), analogiczną do (8.7).

$$\begin{aligned}\frac{dM_{sw}}{dt} &= \frac{1}{T_{zw}} \cdot (M_{pw} - M_{sw}) + \frac{k_{rw}}{T_{zw}} \cdot (v_{zs} - v_z) \\ \frac{dM_{pw}}{dt} &= \frac{k_{rw}}{T_{rw}} \cdot (v_{zs} - v_z) \\ \frac{dv_{zs}}{dt} &= k_{cw} \cdot \text{sign}(v_{zz}^l - v_{zs}) \quad \left| v_{zz}^l \right| \leq v_{zm}\end{aligned}\quad (8.19)$$

Wykorzystując zależności (8.17) i (8.19) można przedstawić opis matematyczny modelu elektromechanicznego mechanizmu wypadu w przestrzeni zmiennych stanu w postaci (8.20).

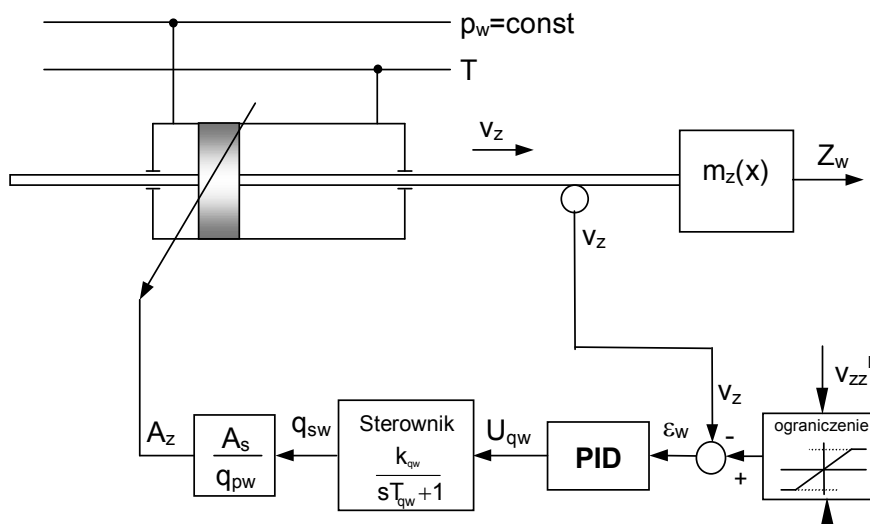
$$\begin{aligned}\frac{dv_z}{dt} &= \frac{1}{m_{zw}} \cdot (P_{sw} + Z + Z_H) - \frac{1}{2 \cdot m_{zw}} \cdot \frac{dm_z}{dx} \cdot v_z^2 \\ \frac{dM_{sw}}{dt} &= \frac{1}{T_{zw}} \cdot (M_{pw} - M_{sw}) + \frac{k_{rw}}{T_{zw}} \cdot (v_{zs} - v_z) \\ \frac{dM_{pw}}{dt} &= \frac{k_{rw}}{T_{rw}} \cdot (v_{zs} - v_z) \\ \frac{dv_{zs}}{dt} &= k_{cw} \cdot \text{sign}(v_{zz}^l - v_{zs}) \quad \left| v_{zz}^l \right| \leq v_{zm}\end{aligned}\quad (8.20)$$

Zredukowana siła napędowa  $P_{sw}$  jest wprost proporcjonalna do momentu napędowego silnika elektrycznego  $M_{sw}$ .

Wielkością wejściową dla modelu jest zadana prędkość śruby mechanizmu wypadu  $v_{zz}^l$  w miejscu jej połączenia z nakrętką ograniczona do wartości  $v_{zm}$ , wielkości zakłócające stanowią: siła  $Z$  wywołana ciężarami elementów układu wypadowego i ładunku oraz siłami bezwładności przy obrocie, jak również opór ruchu  $Z_H$  wywołany składową poziomą  $H_w$  siły w linach ładunku działającą w płaszczyźnie wypadu.

#### 8.4.4. Model hydrostatycznego mechanizmu wypadu.

Model dynamiczny hydrostatycznego mechanizmu wypadu zasilanego ze stałociśnieniowej sieci hydraulicznej pokazano na rys. 8.23.



Rys. 8.23. Model dynamiczny hydrostatycznego mechanizmu wypadu.

Dzięki zastosowaniu transformatora hydraulicznego układ napędowy mechanizmu zmiany wysokości można przedstawić jako siłownik hydrauliczny o zmiennej powierzchni zastępczej  $A_z$ , którą dla transformatora idealnego (bez strat) określa zależność (8.21).

$$A_z = \frac{A_s}{q_{pw}} \cdot q_{sw} \quad (8.21)$$

$A_s$  - rzeczywista powierzchnia czynna tłoka cylindra hydraulicznego,  
 $q_{pw}$  - wydajność jednostkowa pompy transformatora hydraulicznego,  
 $q_{sw}$  - zmienna chłonność jednostkowa silnika transformatora hydraulicznego.

Siłownik napędza element o masie zastępczej  $m_z$  poruszający się wzdłuż osi cylindra z prędkością tłoczyska  $v_z$  w miejscu połączenia cylindra z konstrukcją stalową części obrotowej. Sterownik chłonności silnika zamodelowano jako człon inercyjny pierwszego rzędu, którym steruje regulator prędkości PID. Założono, że sieć stałociśnieniowa jest idealna, tzn. ciśnienie  $p_w$  jest stałe, niezależnie od ilości oleju pobieranej do napędu mechanizmu.

Dodatkowo oprócz wielkości  $A_s$  i  $q_{pw}$  omówionych powyżej określone zostały następujące parametry i wielkości zakłócające modelu:



- $m_z$  - zredukowana do osi cylindra hydraulicznego masa wszystkich elementów układu wypadowego,
- $Z_w$  - zredukowana do osi cylindra hydraulicznego siła oporów ruchu mechanizmu wypadu,
- $v_{zm}$  - maksymalna prędkość siłownika wypadu,
- $q_{swm}$  - maksymalna chłonność jednostkowa silnika transformatora hydraulicznego,
- $f_{sw}$  - współczynnik tłumienia wiskotycznego silnika hydraulicznego zredukowany do osi cylindra hydraulicznego,
- $p_w$  - ciśnienie nominalne sieci stałociśnieniowej,
- $T_{iw}$  - stała czasowa członu całkującego w regulatorze,
- $T_{dw}$  - stała czasowa pomocnicza członu różniczkującego w regulatorze,
- $\tau_{dw}$  - stała czasowa członu różniczkującego w regulatorze,
- $k_{rw}$  - współczynnik wzmocnienia regulatora PID,
- $T_{qw}$  - stała czasowa sterownika chłonności silnika hydraulicznego,
- $k_{qw}$  - współczynnik wzmocnienia sterownika.

Wybrano następujące zmienne stanu modelu:

- $v_z$  - prędkość tłoczyska siłownika zmiany wysięgu w miejscu jego połączenia z konstrukcją stalową części obrotowej,
- $q_{sw}$  - chłonność jednostkową silnika hydrostatycznego w transformatorze,
- $\varepsilon_{iw}$  - sygnał wyjściowy członu całkującego w regulatorze PID,
- $\varepsilon_{dw}$  - sygnał wyjściowy członu różniczkującego w regulatorze PID.

Wielkością sterującą jest zadana prędkość  $v_{zz}^I$  tłoczyska siłownika zmiany wysięgu w miejscu jego połączenia z konstrukcją stalową części obrotowej.

Równanie ruchu elementów związanych z tłoczyskiem siłownika jest analogiczne do (8.15) i w rozpatrywanym przypadku ma postać (8.22).

$$m_z \cdot \frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_z}{dt} \cdot v_z = P_{sw} + Z_w \quad Z_w = Z + Z_H \quad (8.22)$$

$$P_{sw} = p_w \cdot A_z - f_{sw} \cdot v_z = \frac{p_w \cdot A_s}{q_{pw}} \cdot q_{sw} - f_{sw} \cdot v_z \quad \text{- siła napędowa cylindra hydraulicznego.}$$

Po uzależnieniu masy zredukowanej  $m_z$  od długości siłownika wypadu  $x$  wyrażenie na pochodną  $\frac{dm_z}{dt}$  przyjmuje postać (8.23).

$$\frac{dm_z}{dt} = \frac{dm_z}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dm_z}{dx} \cdot v_z \quad (8.23)$$

Równanie członu całkującego w regulatorze ma postać (8.24).

$$\frac{d\varepsilon_{iw}}{dt} = \frac{1}{T_{iw}} \cdot \varepsilon_w \quad (8.24)$$

$\varepsilon_w = v_{zz}^l - v_z$  - uchyb między zadaną i rzeczywistą prędkością tłoczyska siłownika wypadu w miejscu połączenia z konstrukcją stalową części obrotowej.

Równanie członu różniczkującego w regulatorze ma postać (8.25).

$$\tau_{dw} \cdot \frac{d\varepsilon_w}{dt} = T_{dw} \cdot \frac{d\varepsilon_{dw}}{dt} + \varepsilon_{dw} \quad (8.25)$$

$$\frac{d\varepsilon_w}{dt} = \frac{dv_{zz}^l}{dt} - \frac{dv_z}{dt}$$

Sygnal wyjściowy z regulatora  $U_{qw}$  będący jednocześnie sygnałem wejściowym dla sterownika silnika transformatora hydraulicznego wyraża się zależnością (8.26).

$$U_{qw} = k_{rw} \cdot (\varepsilon_w + \varepsilon_{iw} + \varepsilon_{dw}) = k_{rw} \cdot (v_{zz}^l - v_z + \varepsilon_{iw} + \varepsilon_{dw}) \quad (8.26)$$

Równanie sterownika chłonności jednostkowej silnika transformatora hydraulicznego ma postać (8.27).

$$T_{qw} \cdot \frac{dq_{sw}}{dt} + q_{sw} = k_{qw} \cdot U_{qw} \quad |q_{sw}| \leq q_{swm} \quad (8.27)$$

Wykorzystując zależności (8.22) ÷ (8.27) można przedstawić opis matematyczny hydrostatycznego mechanizmu wypadu w przestrzeni zmiennych stanu w postaci (8.28).

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_z}{dt} &= \frac{p_w \cdot A_s}{q_{pw} \cdot m_z} \cdot q_{sw} - \frac{f_{sw}}{m_z} \cdot v_z + \frac{1}{m_z} \cdot (Z + Z_H) - \frac{1}{2 \cdot m_z} \cdot \frac{dm_z}{dx} \cdot v_z^2 \\
 \frac{dq_{sw}}{dt} &= -\frac{1}{T_{qw}} \cdot q_{sw} + \frac{k_{qw} \cdot k_{rw}}{T_{qw}} \cdot (v_{zz}^l - v_z + \varepsilon_{iw} + \varepsilon_{dw}) \quad |q_{sw}| \leq q_{swm} \\
 \frac{d\varepsilon_{iw}}{dt} &= \frac{1}{T_{iw}} \cdot (v_{zz}^l - v_z) \quad |v_{zz}^l| \leq v_{zm} \\
 \frac{d\varepsilon_{dw}}{dt} &= -\frac{1}{T_{dw}} \cdot \varepsilon_{dw} + \\
 &+ \frac{\tau_{dw}}{T_{dw}} \cdot \left( \frac{dv_{zz}}{dt} - \frac{p_w \cdot A_s}{q_{pw} \cdot m_z} \cdot q_{sw} + \frac{f_{sw}}{m_z} \cdot v_z - \frac{1}{m_z} \cdot (Z + Z_H) + \frac{1}{2 \cdot m_z} \cdot \frac{dm_z}{dx} \cdot v_z^2 \right)
 \end{aligned}
 \tag{8.28}$$

Wielkością sterującą dla modelu jest zadana prędkość tłoka siłownika mechanizmu wypadu w miejscu jego połączenia z konstrukcją stalową części obrotowej  $v_{zz}^l$  ograniczona do wartości  $v_{zm}$ , wielkości zakłócające stanowią: siła  $Z$  wywołana ciężarami elementów układu wypadowego i ładunku oraz siłami bezwładności przy obrocie, jak również opór ruchu  $Z_H$  wywołany składową poziomą  $H_w$  siły w linach ładunku działającą w płaszczyźnie wypadu.

#### 8.4.5. Modele układów sterowniczych.

Zarówno mechanizm obrotu, jak i wypadu współpracują z układami regulacji położenia, które zostały opisane w rozdziale 8.3.5.

Wykorzystując schemat i oznaczenia z rys. 8.13 można utworzyć opis matematyczny układu sterowania mechanizmu obrotu.

$$\begin{aligned}
 \omega_{oz}^l &= \omega_{oz} + \Delta\omega_{oz} & \Delta\omega_{oz} &= k_\alpha \cdot \varepsilon_\alpha & \varepsilon_\alpha &= \alpha_{oz} - \alpha_o \\
 \frac{d\alpha_{oz}}{dt} &= \omega_{oz} & \frac{d\alpha_o}{dt} &= \omega_o & \frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} &= \frac{d\alpha_{oz}}{dt} - \frac{d\alpha_o}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{8.29}$$

$k_\alpha$  - współczynnik wzmocnienia regulatora położenia mechanizmu obrotu.

Zmiennymi stanu modelu są: kąt obrotu żurawia  $\alpha_o$  oraz uchyb położenia kąтового  $\varepsilon_\alpha$ , wielkością sterującą jest zadana prędkość kątowa części obrotowej  $\omega_{oz}$ , która po skorygowaniu przez regulator położenia o sygnał  $\Delta\omega_{oz}$  jest w postaci  $\omega_{oz}^l$  podawany na wejście mechanizmu obrotu żurawia.

Analogicznie, wykorzystując schemat i oznaczenia z rys. 8.14 można utworzyć opis matematyczny układu sterowania mechanizmu wypadu.

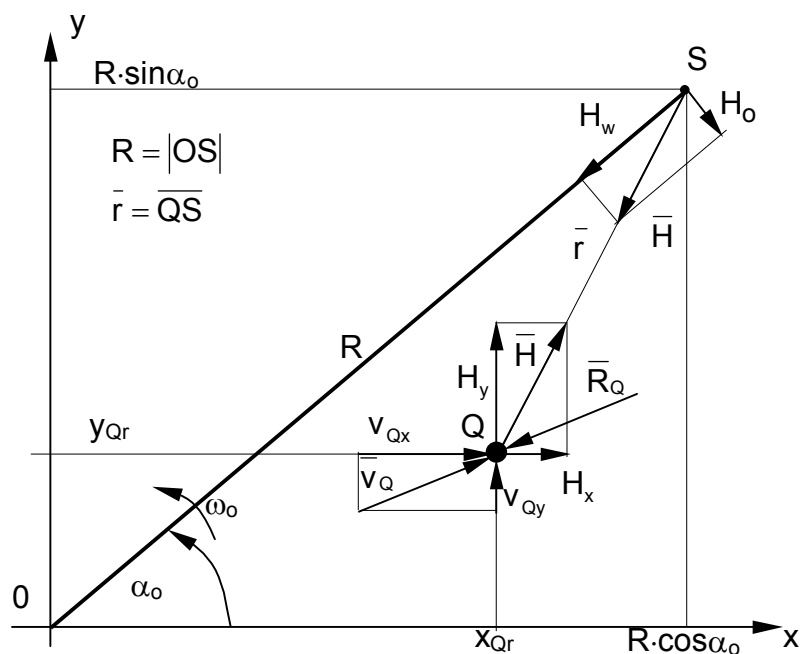
$$\begin{aligned} v_{zz}^l &= v_{zz} + \Delta v_{zz} & \Delta v_{zz} &= k_x \cdot \varepsilon_x & \varepsilon_x &= x_z - x \\ \frac{dx_z}{dt} &= v_{zz} & \frac{dx}{dt} &= v_z & \frac{d\varepsilon_x}{dt} &= \frac{dx_z}{dt} - \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad (8.30)$$

$k_x$  - współczynnik wzmocnienia regulatora położenia mechanizmu wypadu.

Zmiennymi stanu modelu są: długość śruby lub siłownika wypadu  $x$  oraz uchyb długości  $\varepsilon_x$ , wielkością sterującą jest zadana prędkość śruby w miejscu połączenia z nakrętką lub tłoczyska siłownika w miejscu jego połączenia z konstrukcją stalową części obrotowej  $v_{zz}$  podawana do układu sterowania wypadem, która po skorygowaniu przez regulator położenia o sygnał  $\Delta v_{zz}$  jest w postaci  $v_{zz}^l$  podawany na wejście mechanizmu wypadu żurawia.

#### 8.4.6. Model zawieszonoego na linach ładunku.

Podobnie jak przy skojarzonych ruchach mostu i wózka suwnicy, ładunek zawieszony na linach zaczepionych do krążka szczytowego żurawia potraktowany został jako wahadło matematyczne sferyczne. Przyjęto nieruchomy prostokątny poziomy układ współrzędnych o początku pokrywającym się z osią obrotu żurawia. W układzie tym określane są położenia i prędkości poziome zawieszonoego na linach ładunku.



Rys. 8.24. Współrzędne ładunku oraz siły działające na ładunek w polu pracy żurawia.

Układ sił poziomych działających na ładunek oraz jego współrzędne i prędkości w polu pracy żurawia pokazuje rys. 8.24.

Z ruchem ładunku związane zostały następujące zmienne stanu:

- $v_{Qx}$  - składowa prędkości ładunku w kierunku osi  $x$ ,
- $v_{Qy}$  - składowa prędkości ładunku w kierunku osi  $y$ ,
- $x_{Qr}$  - współrzędna położenia ładunku w kierunku osi  $x$ ,
- $y_{Qr}$  - współrzędna położenia ładunku w kierunku osi  $y$ .

Stosując oznaczenia z rys. 8.24 można opisać ruch ładunku w sposób przedstawiony poniżej.

$$m_Q \cdot \frac{d\bar{v}_Q}{dt} = \bar{H} + \bar{R}_Q \quad (8.31)$$

$\bar{v}_Q$  - wektor wypadkowej prędkości poziomej ładunku,

$\bar{H} = c_Q \cdot \bar{r}$  - składowa pozioma siły w linach,

$\bar{R}_Q = -f_Q \cdot \bar{v}_Q$  - siła oporu powietrza dla ładunku,

$\bar{r}$  - wypadkowe wychylenie krążka szczytowego względem ładunku.

Po zrutowaniu równań (8.31) na kierunek x oraz y otrzymuje się następujące zależności.

$$\begin{aligned} m_Q \cdot \frac{dv_{Qx}}{dt} &= H_x + R_{Qx} = c_Q \cdot (R \cdot \cos \alpha_o - x_{Qr}) - f_Q \cdot v_{Qx} \\ m_Q \cdot \frac{dv_{Qy}}{dt} &= H_y + R_{Qy} = c_Q \cdot (R \cdot \sin \alpha_o - y_{Qr}) - f_Q \cdot v_{Qy} \end{aligned} \quad (8.32)$$

$\alpha_o$  - aktualne położenie kątowne części obrotowej,

R - aktualny wysięg żurawia.

Wykorzystując równania (8.32) oraz zależności kinematyczne można przedstawić opis matematyczny modelu ładunku w przestrzeni zmiennych stanu.

$$\begin{aligned} \frac{dv_{Qx}}{dt} &= \frac{c_Q}{m_Q} \cdot (R \cdot \cos \alpha_o - x_{Qr}) - \frac{f_Q}{m_Q} \cdot v_{Qx} \\ \frac{dv_{Qy}}{dt} &= \frac{c_Q}{m_Q} \cdot (R \cdot \sin \alpha_o - y_{Qr}) - \frac{f_Q}{m_Q} \cdot v_{Qy} \\ \frac{dx_{Qr}}{dt} &= v_{Qx} \\ \frac{dy_{Qr}}{dt} &= v_{Qy} \end{aligned} \quad (8.33)$$

Stosując oznaczenia z rys. 8.24 można określić zależności na reakcje poziome  $H_o$  i  $H_w$  obciążające krążek szczytowy żurawia odpowiednio w kierunku obrotu i wypadu i wywołane składową poziomą siłą w linach ładunku zaczepionych do krążka szczytowego.

$$\begin{aligned} H_o &= -H_y \cdot \cos \alpha_o + H_x \cdot \sin \alpha_o = \\ &= c_Q \cdot (R \cdot \sin \alpha_o - y_{Qr}) \cdot \cos \alpha_o + c_Q \cdot (R \cdot \cos \alpha_o - x_{Qr}) \cdot \sin \alpha_o \\ H_w &= -H_x \cdot \cos \alpha_o - H_y \cdot \sin \alpha_o = \\ &= c_Q \cdot (R \cdot \cos \alpha_o - x_{Qr}) \cdot \cos \alpha_o + c_Q \cdot (R \cdot \sin \alpha_o - y_{Qr}) \cdot \sin \alpha_o \end{aligned} \quad (8.34)$$

Znajomość reakcji  $H_o$  i  $H_w$  umożliwia wyznaczenie oporów ruchu mechanizmu obrotu  $M_o$  oraz jednej ze składowych oporów ruchu mechanizmu wypadu  $Z_H$ .

$$M_o = R \cdot H_o \quad Z_H = i_w \cdot H_w \quad (8.35)$$

Wielkościami sterującymi dla modelu zawieszonoego na linach ładunku są:

- $\alpha_o$  - rzeczywisty kąt obrotu (położenie kątowe) części obrotowej żurawia będący zmienną stanu modelu mechanizmu obrotu,
- R - wysięg żurawia stanowiący znaną funkcję rzeczywistej długości śruby lub siłownika wypadu x będącej zmienną stanu modelu mechanizmu wypadu żurawia.

#### 8.4.7. Model ruchów skojarzonych obrotu i wypadu.

Wykorzystując modele mechanizmów obrotu i wypadu w obydwu wersjach elektromechanicznej i hydrostatycznej oraz modele układów sterowniczych i zawieszonoego na linach ładunku utworzono modele opisujące skojarzone ruchy obrotu i wypadu. Wychodząc od modeli niestacjonarnych o zmiennych masach i uzależniając zmienne parametry od zmiennych stanu uzyskano modele stacjonarne nieliniowe.

W modelu ruchów skojarzonych obejmującym mechanizmy z napędem falownikowym wyróżniono następujące zmienne stanu będące składowymi wektora stanu  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \left[ \omega_o, v_z, M_{so}, M_{sw}, M_{po}, M_{pw}, \omega_{os}, v_{zs}, \alpha_o, X, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_x, v_{Qx}, v_{Qy}, X_{Qr}, Y_{Qr} \right]^T \quad (8.36)$$

W modelu ruchów skojarzonych obejmującym mechanizmy z napędem hydrostatycznym wyróżniono następujące składowe wektora stanu  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \left[ \omega_o, v_z, q_{so}, q_{sw}, \varepsilon_{io}, \varepsilon_{iw}, \varepsilon_{do}, \varepsilon_{dw}, \alpha_o, X, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_x, v_{Qx}, v_{Qy}, X_{Qr}, Y_{Qr} \right]^T \quad (8.37)$$

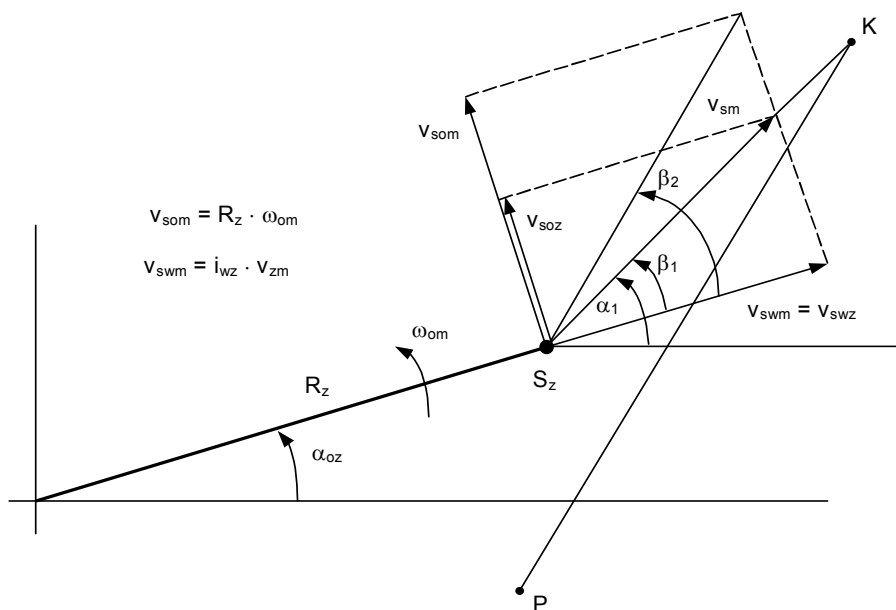
W obu przypadkach składowe wektora sterowania  $\mathbf{u}$  stanowią:

- $\omega_{oz}$  - zadana prędkość obrotu żurawia,
- $v_{zz}$  - zadana prędkość śruby lub siłownika wypadu w miejscu połączenia odpowiednio z nakrętką lub z konstrukcją stalową części obrotowej.

### 8.5. Optymalna funkcja sterująca w ruchu roboczym.

Optymalna funkcja sterująca w ruchu roboczym obejmująca przebiegi czasowe zadanych prędkości obrotu  $\omega_{oz}(t)$  oraz wypadu  $v_{zz}(t)$  została określona tak, aby krążek szczytowy S żurawia poruszał się od punktu początkowego P do końcowego K wzdłuż linii prostej poziomej PK (rys. 8.1) z prędkością zapewniającą wytlumienie wahań ładunku po okresach rozruchu i hamowania oraz jego dojazd do punktu K z zadawalającą dokładnością.

Sposób określania maksymalnej wartości oraz kierunku zadanej prędkości krążka szczytowego  $v_{sz}(t)$  pokazuje rys. 8.25. W dowolnym położeniu zadanym żurawia prędkość zadana krążka szczytowego jest skierowana w stronę punktu K, a ograniczenie jej wartości wynika z możliwości mechanizmów obrotu i wypadu. Rys. 8.25 pokazuje sytuację, kiedy wykorzystana zostaje maksymalna prędkość mechanizmu wypadu, natomiast prędkość obrotu zostaje ograniczona ze względu na konieczność zachowania odpowiedniego kierunku zadanej prędkości wypadkowej krążka szczytowego  $v_{sz}$ .



Rys. 8.25. Sposób określania maksymalnej zadanej prędkości krążka szczytowego.



Maksymalne możliwe do osiągnięcia składowe prędkości zadanej krążka szczytowego w kierunku obrotu  $v_{som}$  i wypadu  $v_{swm}$  w danym położeniu zadany układ wypadowego określają zależności (8.38).

$$v_{som} = R_z \cdot \omega_{om} \quad v_{swm} = i_{wz} \cdot v_{zm} \quad (8.38)$$

$R_z$  - zadany wysięg żurawia, będący jednoznacznie funkcją zadanej długości śruby lub siłownika wypadu  $x_z$ ,

$i_{wz}$  - przełożenie mechanizmu wypadu określające stosunek prędkości krążka szczytowego w kierunku wypadu do prędkości śruby lub siłownika wypadu w miejscu połączenia z konstrukcją stałą części obrotowej i odpowiadające zadanej długości śruby lub siłownika wypadu  $x_z$ .

Stosując oznaczenia z rys. 8.25 można wyznaczyć maksymalną prędkość zadaną krążka szczytowego  $v_{sm}$  wzdłuż odcinka PK.

$$\alpha_1 = \arctg \frac{y_k - R_z \cdot \sin \alpha_{oz}}{x_k - R_z \cdot \cos \alpha_{oz}} \quad \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_{oz}$$

$$\sin \beta_2 = \frac{v_{som}}{\sqrt{v_{som}^2 + v_{swm}^2}} \quad (8.39)$$

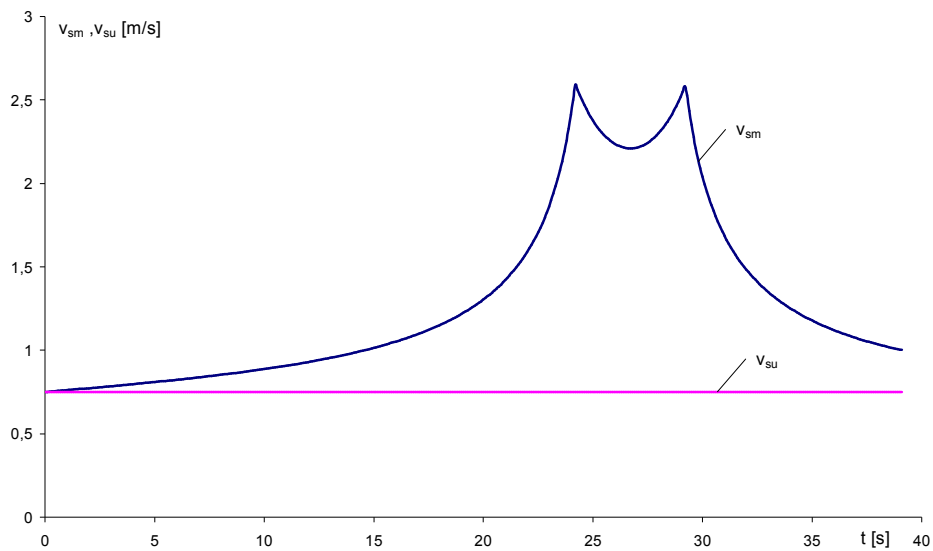
$$|\sin \beta_1| < \sin \beta_2 \Rightarrow v_{sm} = \frac{v_{swm}}{|\cos \beta_1|}$$

$$|\sin \beta_1| > \sin \beta_2 \Rightarrow v_{sm} = \frac{v_{som}}{|\sin \beta_1|}$$

Wykres maksymalnej możliwej do osiągnięcia prędkości krążka szczytowego  $v_{sm}$  wzdłuż przykładowej prostej PK przedstawia rys. 8.26.

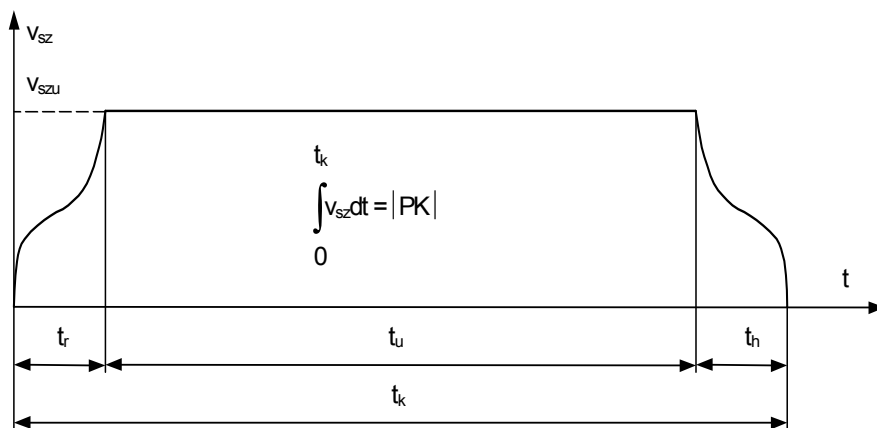
Na wykresie zaznaczono również prędkość  $v_{su}$ , z jaką krążek szczytowy może poruszać się ruchem ustalonym wzdłuż odcinka PK.

Ruch roboczy żurawia przy transporcie poziomym ładunku wzdłuż prostej PK składa się z okresów rozruchu, ruchu ustalonego ze stałą prędkością  $v_{su}$  oraz hamowania. Przebiegi prędkości zadanej krążka szczytowego w okresach rozruchu i hamowania zostały określone przy zastosowaniu jednej z omówionych metod optymalizacji, tak aby zminimalizować wahania ładunku po tych okresach, natomiast czas ruchu ustalonego  $t_u$  został tak dobrany, aby zadana droga krążka szczytowego wzdłuż odcinka PK była równa jego długości.



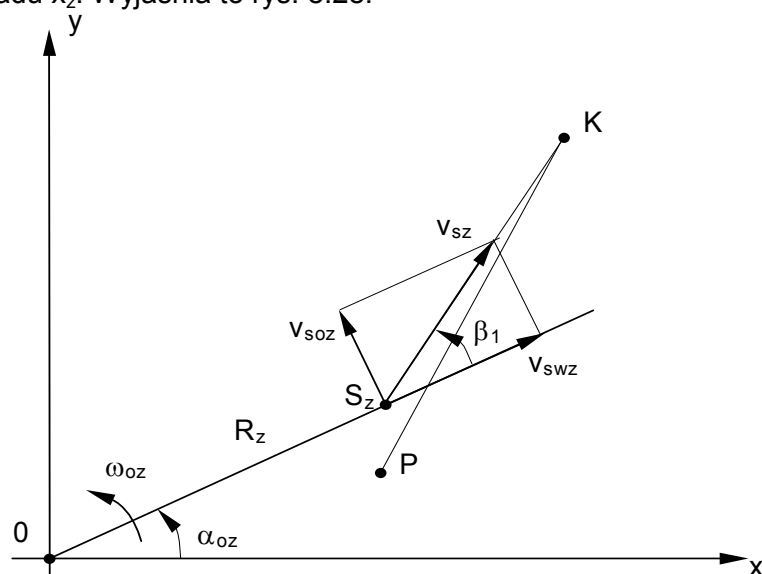
Rys. 8.26. Wykres maksymalnej prędkości krążka szczytowego wzdłuż odcinka PK.

Przykładowy przebieg prędkości zadanej krążka szczytowego  $v_{sz}$  pokazano na rys. 8.27.



Rys. 8.27. Zadana prędkość krążka szczytowego w ruchu roboczym.

Znajomość zadanej prędkości  $v_{sz}$  krążka szczytowego wzdłuż odcinka PK umożliwia znalezienie jej składowych w kierunku obrotu  $v_{soz}$  i wypadu  $v_{swz}$ , jak również zadanych prędkości obrotu  $\omega_{oz}$  oraz śruby lub siłownika wypadu  $v_{zz}$  dla każdego zadanego położenia krążka szczytowego, wynikającego z zadanych położań mechanizmu obrotu  $\alpha_{oz}$  i wypadu  $x_z$ . Wyjaśnia to rys. 8.28.

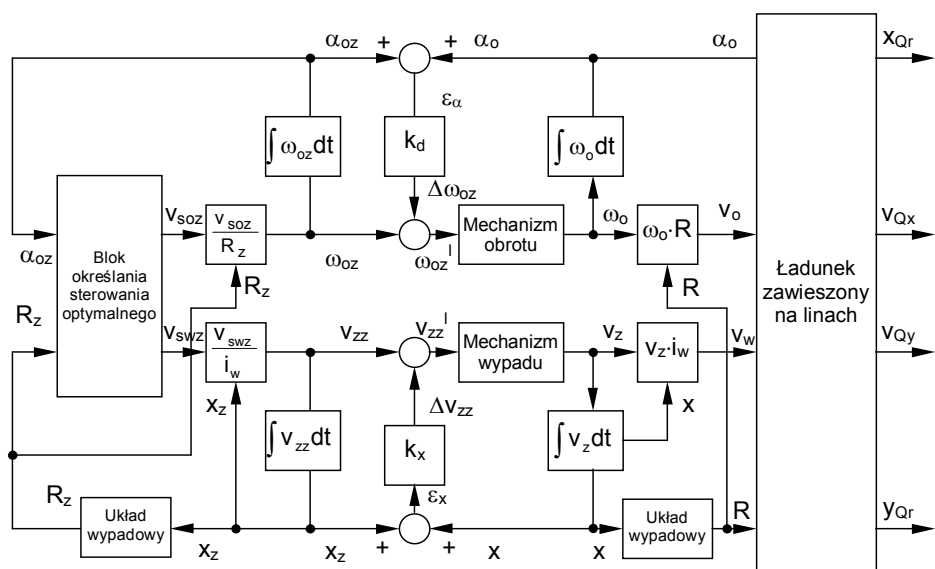


Rys. 8.28. Sposób wyznaczania zadanych prędkości obrotu i wypadu.

Słuszne są przy tym poniższe zależności.

$$\begin{aligned} v_{soz} &= v_{sz} \cdot \sin \beta_1 & v_{swz} &= v_{sz} \cdot \cos \beta_1 \\ \omega_{oz} &= \frac{v_{soz}}{R_z} & v_{zz} &= \frac{v_{swz}}{i_{wz}} \end{aligned} \quad (8.40)$$

Schemat blokowy układu sterowania skojarzonymi ruchami mechanizmów obrotu i wypadu żurawia pokazano na rys. 8.29.



Rys. 8.29. Schemat blokowy układu sterowania ruchami skojarzonymi mechanizmów obrotu i wypadu żurawia.

Wyznaczenie funkcji sterującej dla realizacji ruchu roboczego polegającego na przeprowadzeniu ładunku wzdłuż prostej poziomej od położenia początkowego P do końcowego K przy skojarzonych ruchach mechanizmu obrotu i wypadu odbywa się według poniższego algorytmu.

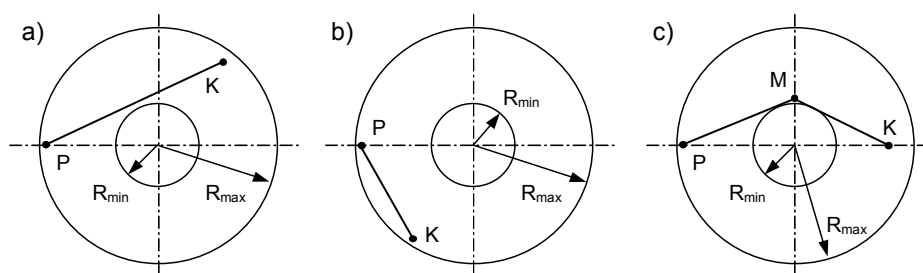
- Sprawdzenie, czy prosta pozioma PK nie przecina koła o promieniu  $R_{min}$ . Jeżeli tak, to następuje podział toru na dwa odcinki PM i MK (rys. 8.2).
- Określenie maksymalnej, możliwej do zrealizowania prędkości krążka szczytowego wzdłuż odcinka PK w każdym jego punkcie przy wykorzystaniu maksymalnych prędkości obrotu i wypadu.
- Określenie prędkości krążka szczytowego wzdłuż prostej PK w ruchu ustalonym  $v_{su}$ , możliwej do osiągnięcia w każdym punkcie toru.
- Określenie sterowania optymalnego, czyli przebiegu czasowego prędkości zadanej krążka szczytowego  $v_{sz}(t)$  wzdłuż odcinka PK (prędkość w ruchu ustalonym, kształt funkcji przy rozruchu i hamowaniu, czas ruchu ustalonego).

- Sprawdzenie dokładności dojazdu krążka szczytowego do punktu końcowego K i korekta czasu ruchu ustalonego  $t_u$ .
- Realizacja ruchu roboczego przy zastosowaniu optymalnej funkcji sterującej, która determinuje zadane prędkości obrotu i wypadu w każdym zadanym położeniu żurawia.

### 8.6. Badania symulacyjne.

Przeprowadzone zostały badania symulacyjne skojarzonych ruchów mechanizmów obrotu i wypadu w obu wersjach: elektromechanicznej i hydrostatycznej, przy założeniu przenoszenia ładunku w płaszczyźnie poziomej z punktu początkowego P do końcowego K wzdłuż linii prostej z zastosowaniem sterowania optymalnego, zapewniającego wytłumienie wahań ładunku po okresach rozruchu i hamowania oraz jego dojazd do położenia końcowego z zadawalającą dokładnością (pozycjonowanie).

Wybrano trzy możliwe kombinacje położenia punktów P i K w polu pracy, przedstawione na rys. 8.30.



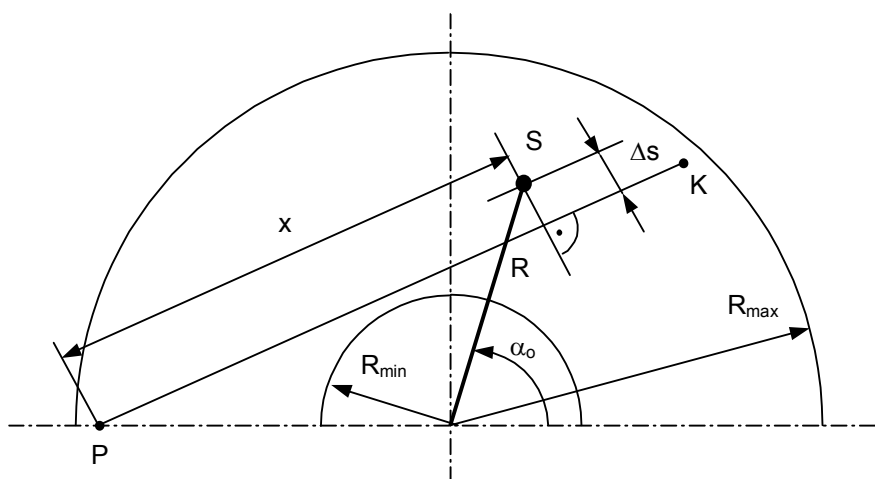
Rys. 8.30. Wybrane ruchy robocze żurawia w płaszczyźnie poziomej.

Przypadek „a” odpowiada ruchowi wzdłuż prostej przechodzącej w pobliżu obszaru minimalnego zasięgu żurawia, przypadek „b” obejmuje ruch wzdłuż prostej położonej w pobliżu obszaru maksymalnego zasięgu pola pracy. W przypadku „c” prosta PK przecina koło o promieniu  $R_{min}$  i ruch odbywa się wzdłuż łamanej.

W każdym z przypadków „a”, „b” i „c” określono przebiegi czasowe następujących wielkości fizycznych:

$v_{sz}$  - prędkości zadanej krążka szczytowego,

- $v_s$  - prędkości rzeczywistej krążka szczytowego,
- $s_{zq}$  - wychylenia ładunku względem krążka szczytowego wzdłuż prostej PK,
- $Z_w$  - oporu ruchu mechanizmu wypadu zredukowanego do osi siłownika.



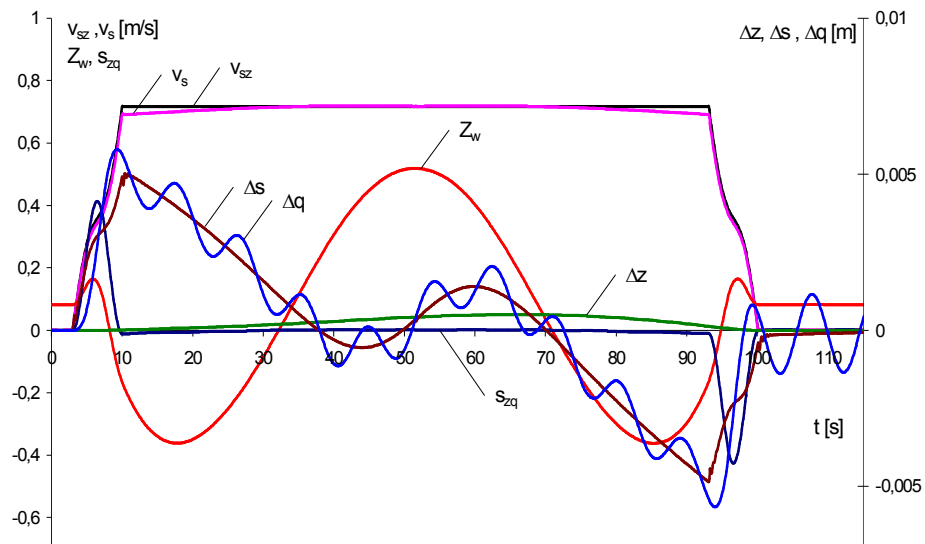
Rys. 8.31. Odchyłki położenia rzeczywistego krążka szczytowego od prostej PK w dowolnej chwili ruchu roboczego.

Ponadto wyznaczono przebiegi czasowe odchyień od prostej PK dla następujących wielkości fizycznych w całym ruchu roboczym:

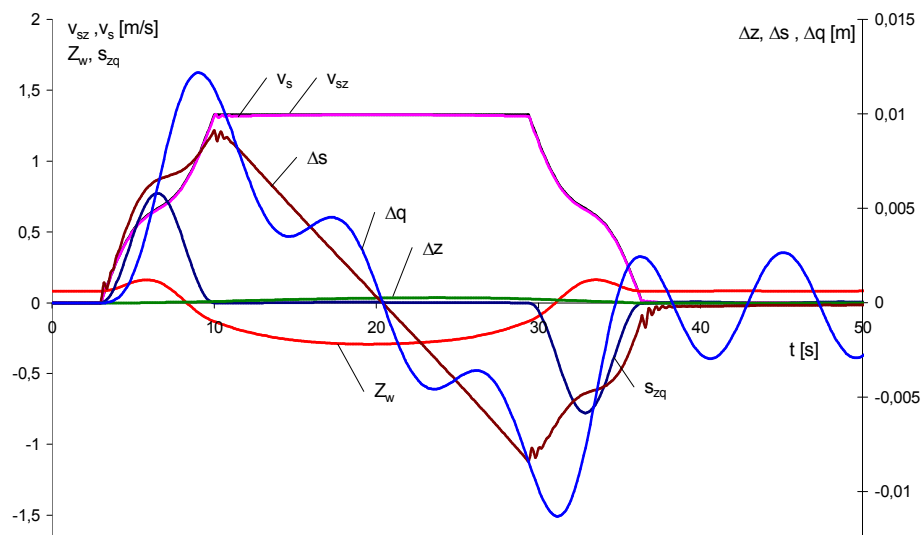
- $\Delta z$  - odchylenie zadanego położenia krążka szczytowego od prostej PK,
- $\Delta s$  - odchylenie rzeczywistego położenia krążka szczytowego od prostej PK,
- $\Delta q$  - odchylenie rzeczywistego położenia ładunku od prostej PK.

Przykładowo, sposób określenia odchylenia  $\Delta s$  dla rzeczywistego położenia krążka szczytowego wyjaśnia rys. 8.31.

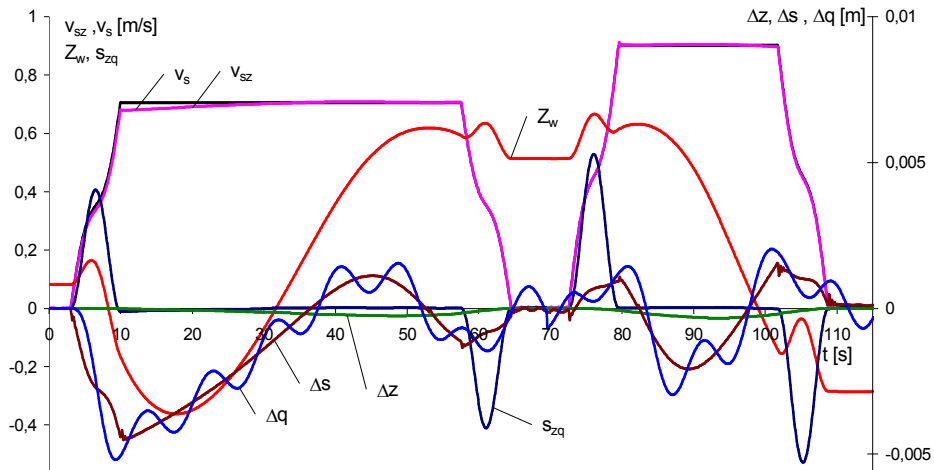
Wyniki badań symulacyjnych dla przypadków ruchu roboczego „a”, „b” i „c” przedstawiono odpowiednio na rysunkach 8.32., 8.33. i 8.34. dla napędu elektromechanicznego oraz na rysunkach 8.35., 8.36. i 8.37. dla napędu hydrostatycznego.



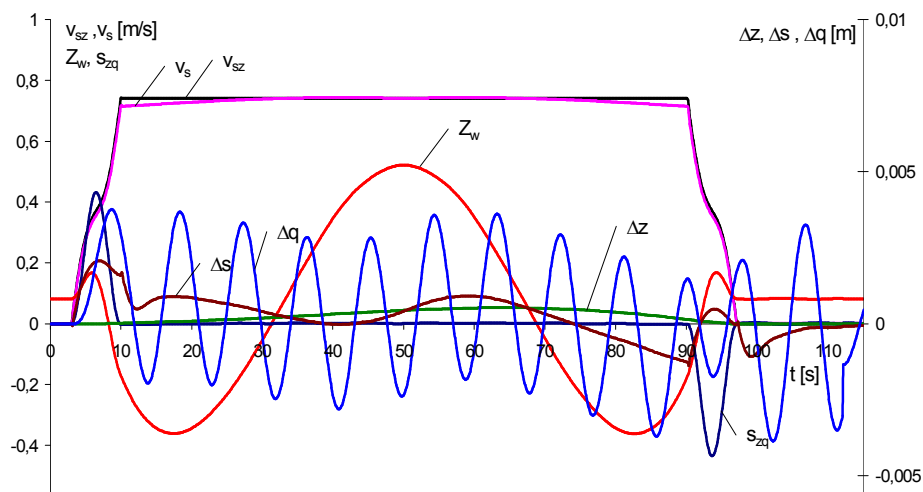
Rys. 8.32. Badania symulacyjne. Napęd elektromechaniczny. Przypadek ruchu roboczego „a”.



Rys. 8.33. Badania symulacyjne. Napęd elektromechaniczny. Przypadek ruchu roboczego „b”.

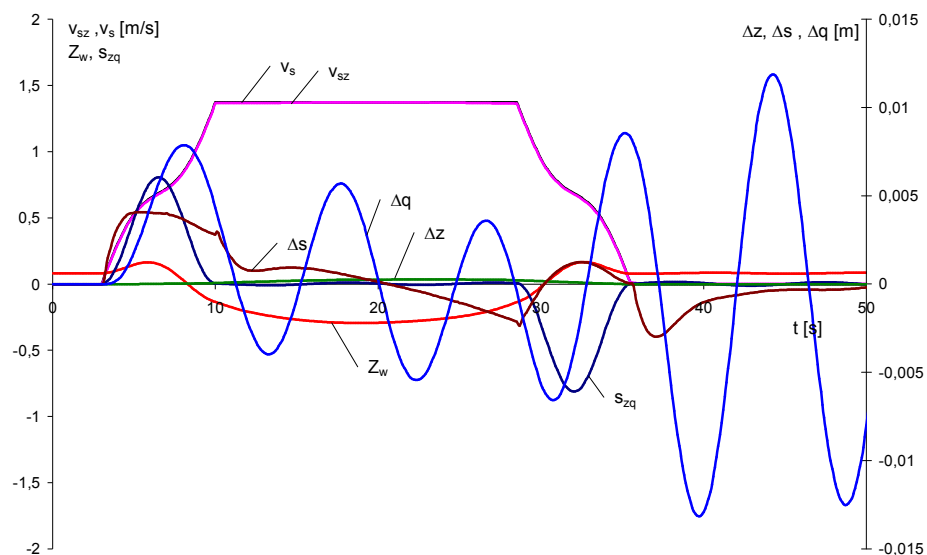


Rys. 8.34. Badania symulacyjne. Napęd elektromechaniczny. Przypadek ruchu roboczego „c”.

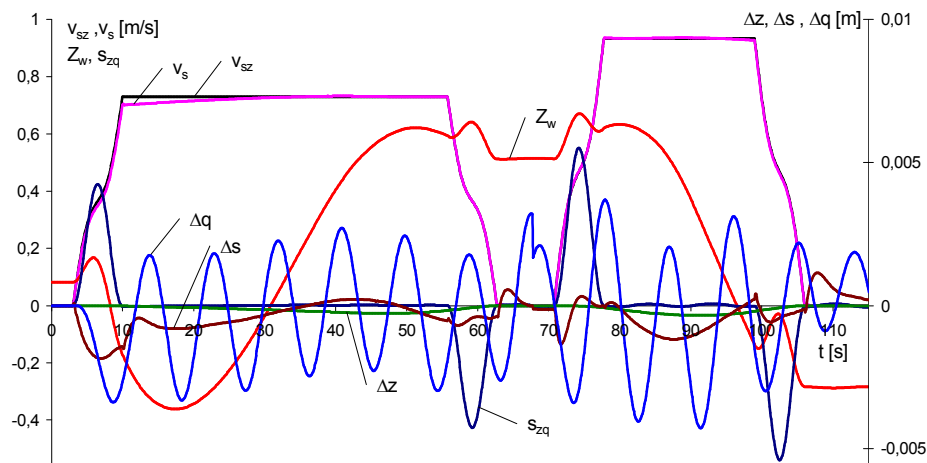


Rys. 8.35. Badania symulacyjne. Napęd hydrostatyczny. Przypadek ruchu roboczego „a”.





Rys. 8.36. Badania symulacyjne. Napęd hydrostatyczny. Przypadek ruchu roboczego „b”.



Rys. 8.37. Badania symulacyjne. Napęd hydrostatyczny. Przypadek ruchu roboczego „c”.

## **8.7. Podsumowanie.**

Dla realizacji założonego sposobu prowadzenia ładunku opracowano układy sterowania, które umożliwiają odpowiednie kojarzenie ruchów obrotu i wypadu żurawia dla obu wersji napędów: elektromechanicznej i hydrostatycznej oraz zapewniają automatyczne prowadzenie ładunku wzdłuż linii prostej poziomej. Każdy z układów sterowania zawiera podwójne układy regulacji w mechanizmie obrotu i wypadu, przy czym wewnętrzne pętle sprzężeń zwrotnych związane są z regulacją prędkości, a zewnętrzne – z ciągłą regulacją położenia. Jest to niezbędne dla poprawnego działania układu pozycjonowania.

Każdy podwójny układ regulacji jest wrażliwy parametrycznie. Dobór współczynników wzmocnienia i parametrów regulatorów został dokonany w oparciu o metodę Zieglera - Nicholasa i wstępne badania symulacyjne dla zapewnienia odpowiedniej stabilności układu.

Opracowano również optymalną funkcję sterującą dla prowadzenia ładunku wzdłuż linii prostej z automatyczną eliminacją jego wahań po okresach rozruchu i hamowania oraz pozycjonowaniem ładunku z odpowiednią dokładnością w wybranym punkcie jego dostawiania.

Przeprowadzone badania symulacyjne skojarzonych ruchów obrotu i wypadu żurawia wykazują prawidłową pracę obu mechanizmów, zarówno w wersji elektromechanicznej, jak i hydraulicznej. Dzięki prawidłowemu doborowi parametrów zastosowanych układów sterowania oraz regulacji prędkości i położenia zapewniona została stabilna praca i dobra jakość procesu regulacji.

Dla obu rodzajów układów napędowych i wszystkich przypadków ruchów roboczych wyniki badań symulacyjnych wskazują na bardzo dobre wytłumienie wahań ładunku (wielkość  $s_{zq}$ ) wzdłuż drogi transportu po okresach rozruchu i zahamowaniu układu. Jest to wynik sterowania prędkością w ruchach nieustalonych za pomocą funkcji optymalnych.

Uzyskuje się bardzo dobrą dokładność pozycjonowania ładunku po zakończeniu cyklu roboczego. Odchyłka  $s_{zq}$  położenia rzeczywistego ładunku względem położenia zadanego jedynie w okresach ruchów nieustalonych osiąga duże wartości we wszystkich przypadkach w ruchu ustalonym nie przekracza 5 mm.,

Uzyskuje się także bardzo dobrą dokładność prowadzenia ładunku wzdłuż linii prostej. Odchylenia ładunku od tej linii nie przekraczają wartości 12 mm dla układu elektromechanicznego oraz wartości 14 mm dla układu hydrostatycznego.

W rezultacie wykonanej pracy opracowano układ oraz metodę pozwalającą na automatyczne sterowanie ruchami skojarzonymi obrotu i wypadu żurawia z automatyczną eliminacją wahań ładunku po okresach rozruchu i zakończeniu ruchu roboczego przy jednoczesnym pozycjonowaniu ładunku. Otrzymane wyniki stanowią dobrą podstawę do budowy rzeczywistego układu eksperymentalnego, który umożliwi optymalizację i automatyzację cyklu roboczego żurawia portowego, zgodnie z opracowaną technologią transportu.



## 9. WNIOSKI KOŃCOWE.

W przedstawionej pracy zaproponowano i opisano metodę optymalizacji, która umożliwia znalezienie sterowań optymalnych maszyn roboczych. Metoda jest deterministyczna, stosunkowo prosta i wymagająca średniej klasy sprzętu komputerowego. Zaadaptowanie metody do rozwiązania konkretnego zadania optymalizacji wymaga dobrego, najlepiej zweryfikowanego eksperymentem, modelu liniowego mechanizmu lub maszyny.

Dla osiągnięcia dobrego efektu optymalizacji kluczowe znaczenie ma wybór odpowiedniego wskaźnika jakości sterowania. Zaproponowane w pracy dwa typy kryterium jakości są wystarczające dla rozwiązania większości problemów inżynierskich. Pokazano, w jaki sposób uzależnić analitycznie wskaźnik jakości od sterowania i podano procedury dochodzenia do rozwiązań optymalnych przy różnych typach obszaru rozwiązań dopuszczalnych.

Przeprowadzone analizy i badania wykazały, że dla danego zagadnienia optymalizacji istnieje nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych. Uwzględnienie obszaru rozwiązań dopuszczalnych nieco ten zakres ogranicza. W takiej sytuacji ogromne znaczenie posiada wybór odpowiedniego punktu startowego optymalizacji, czyli sterowania początkowego, od którego rozpoczyna się optymalizację. Okazuje się, że najlepsze efekty daje przyjęcie jako sterowania początkowego takiego, które jest najczęściej stosowane w praktyce, tzn. sterowania wg funkcji liniowej. Należy również zwrócić uwagę na właściwy dobór współczynników odpowiedzialnych za poprawny przebieg, szybkość i wynik procesu optymalizacji (współczynniki  $\alpha$  i  $\beta$ , rozdział 3). Powinny być one dobrane osobno dla każdego przypadku optymalizacji.

Omówiono metodę wyznaczania sterowania optymalnego dla prostych układów liniowych drugiego rzędu bez tłumienia. Zastosowanie tak wyznaczonego sterowania nawet do układów bardziej skomplikowanych, ale z dominującą odpowiedzią dynamiczną drugiego rzędu daje efekty zadawalające.

Zastosowanie optymalizacji do sterowania rozruchem wciągarki hydrostatycznej umożliwiło zmniejszenie obciążeń maksymalnych mechanizmu o około 20 %. Osiągnięto to dzięki odpowiedniemu doborowi kryterium optymalizacji w postaci wskaźnika jakości drugiego typu. Zadanie optymalizacji rozwiązano dla dwóch przypadków rozruchu: przy więziach wstępnie napiętych ciężarem podnoszonego ładunku („z powietrza”) oraz przy więziach nie napiętych i bez luzu („z podłoża”). Efekt optymalizacji jest bardziej widoczny dla bardziej „ostrego” przypadku rozruchu, tzn. dla rozruchu „z podłoża”.

Omówiona w pracy metoda optymalizacji umożliwiła opracowanie optymalnego sposobu sterowania dla całej grupy mechanizmów realizujących transport poziomy wiotko zawieszzonego na linach ładunku.

Na przykładzie hydrostatycznego mechanizmu jazdy mostu suwnicy pomostowej pokazano sposób wyznaczania optymalnej funkcji sterującej prędkością w całym ruchu roboczym dla ruchu w jednym kierunku. Zawieszony na linach ładunek opisano za pomocą uproszczonego modelu liniowego i przyjęto wskaźnik jakości pierwszego typu proporcjonalny do energii zmagazynowanej w wahającym się ładunku.

Dla ruchów roboczych, w których możliwe jest rozwinięcie pełnej prędkości jazdy, najlepsze efekty daje optymalizacja etapowa: najpierw optymalizacja rozruchu, dopiero potem – hamowania. Taki sposób sterowania optymalnego pozwala na wytlumienie wahań ładunku po okresach rozruchu i hamowania. Polepsza to cechy eksploatacyjne maszyny zapewniając brak wahań ładunku w ruchu ustalonym ze stałą prędkością i po zatrzymaniu układu. Ta ostatnia własność jest ważna przy rozwiązywaniu zagadnień pozycjonowania ładunku. Przeprowadzony bilans energetyczny ruchu roboczego dla różnych przemieszczeń potwierdza zalety optymalnego sposobu sterowania, który uniezależnia ilość wykonanej pracy od faz wahań ładunku i czyni ją zależną jedynie od przebytej drogi.

Opracowano sposób wyznaczania sterowań optymalnych dla małych przemieszczeń, przy których nie jest możliwe osiągnięcie maksymalnej prędkości mechanizmu jazdy. Jako kryterium optymalizacji przyjęto tutaj wskaźnik jakości pierwszego typu, odpowiadający energii zmagazynowanej w wahającym się ładunku po zakończeniu hamowania. Najlepsze efekty dała tu optymalizacja jednoetapowa umożliwiająca znalezienie optymalnej funkcji sterującej od razu w całym ruchu roboczym z pominięciem fazy ruchu ustalonego. Zastosowanie sterowania optymalnego przy małych przemieszczeniach wydłuża nieco

czas ruchu roboczego, co może zostać skompensowane brakiem ruchów dojazdowych.

W celu uniknięcia czasochłonnych procedur iteracyjnych przy pozycjonowaniu ładunku zastosowano procedurę optymalizacyjną do mechanizmu jazdy mostu rzeczywistej suwnicy pomostowej zaopatrzonej w indywidualne napędy elektromechaniczne zasilane z elektroenergetycznych przetwornic częstotliwości (falowników). Układy sterowania mechanizmów zaopatrzone zostały w podukłady regulacji prędkości i położenia, co umożliwiło wyznaczenie sterowania optymalnego uwzględniającego jedynie wahania ładunku, tak jakby jego punkt zawieszenia prowadzony był w sposób zdeterminowany. W badaniach zastosowano dwa modele zawieszono na linach ładunku: w pierwszym przypadku ładunek potraktowano jako wahadło matematyczne, w drugim – uwzględniono ruch płaski ładunku jako ciała sztywnego. Dla obydwu modeli znaleziono odpowiednie optymalne funkcje sterujące, dodatkowo dla modelu pierwszego optymalną funkcję sterującą wyznaczono analitycznie (rozdział 3.5). Przeprowadzone badania symulacyjne i eksperymentalne potwierdziły dobre efekty optymalizacji w postaci wytlumienia wahań ładunku po okresach rozruchu i hamowania. Dodatkowo, dzięki układom regulacji prędkości i przemieszczenia, rozwiązano problemy ukosowania mostu suwnicy i pozycjonowania ładunku przy niesymetrycznym położeniu wózka na moście.

W oparciu o wyniki badań mechanizmu jazdy mostu opracowano koncepcję transportu poziomego ładunku przy skojarzonych ruchach mostu i wózka suwnicy. W zależności od wyboru odpowiedniego poziomu transportowego rozwiązano problem transportu ładunku wzdłuż prostej poziomej oraz łamanej z wytlumieniem wahań po okresach rozruchu i hamowania mechanizmów oraz pozycjonowaniem ładunku po zakończeniu ruchu roboczego. Opracowane zostały modele dynamiczne ruchów skojarzonych i przeprowadzone zostały badania symulacyjne i eksperymentalne przy wykorzystaniu wyznaczonych wcześniej optymalnych funkcji sterujących. Uzyskano bardzo dobre wyniki wytlumienia wahań ładunku i pozycjonowania w badaniach symulacyjnych. Gorsze wyniki badań eksperymentalnych wynikają głównie z niedoskonałości zastosowanych układów napędowych: falowniki w mechanizmach jazdy mostu i wózka posiadają strefy nieczułości, co powoduje niedokładne odwzorowanie sygnałów sterujących w zakresach małych prędkości.

Rozwiązany został problem poziomego transportu ładunku dla maszyn o ruchach obrotowych i wypadowych. Dla portowego żurawia wypadowego opracowano modele mechanizmów obrotu i wypadu w dwóch wersjach: elektromechanicznej i hydrostatycznej. Modele zostały rozbudowane o układy regulacji położenia, co dało podstawę do opracowania kompleksowego modelu ruchów skojarzonych opisującego transport ładunku w płaszczyźnie poziomej. Opracowano metodę takiego kojarzenia prędkości mechanizmu obrotu i wypadu, które zapewnia ruch krążka szczytowego żurawia, a zatem także ładunku wzdłuż linii prostej poziomej. Zastosowanie dodatkowo sterowania optymalnego umożliwia wytłumienie wahań ładunku po okresach rozruchu i hamowania, jak również pozycjonowanie ładunku z wysoką dokładnością w zadanym punkcie pola pracy.

Wykonane badania symulacyjne potwierdziły wszystkie wymienione zalety zaprojektowanego układu. Stanowi on dobrą podstawę do budowy rzeczywistego układu sterowania ruchami skojarzonymi dla maszyn o ruchach obrotowych i wypadowych, a zarazem podstawę automatyzacji tego typu maszyn.



## LITERATURA

- [1] Bednarski S., Cink J., Malenta P., Kilian T.: „Model i badania symulacyjne żurawia portowego z hydraulicznym sterowaniem wtórnym”. VIII Konferencja Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych. Zakopane 1995.
- [2] Bednarski S., Cink J., Malenta P.: „Pozycjonowanie ładunku w ruchu roboczym wciągarki bębnowej z napędem falownikowym”. IV Konferencja Okrętownictwo i Oceanotechnika. Międzyzdroje 1998.
- [3] Bednarski S., Cink J., Tomczyk J.: „Pozycjonowanie ładunku w ruchu roboczym żurawia portowego”. X Konferencja Naukowa Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych. Zakopane 1997.
- [4] Bednarski S., Cink J., Tomczyk J.: „Regulacja mocy w mechanizmie podnoszenia dźwignicy”. Konferencja Naukowo - Techniczna Napędy Maszyn Transportowych. Ustroń 1996.
- [5] Bednarski S., Cink J., Tomczyk J.: „Tłumienie wahań ładunku w ruchu roboczym żurawia portowego”. IX Konferencja Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych. Zakopane 1996.
- [6] Bednarski S., Cink J., Tomczyk J.: „Wpływ parcia wiatru na prowadzenie ładunku w ruchu roboczym żurawia portowego”. III Konferencja Okrętownictwo i Oceanotechnika. Międzyzdroje 1997.
- [7] Bednarski S., Cink J., Wolski T.: „Model i badania symulacyjne suwnicy ze sterowaniem wtórnym”. VII Konferencja Rozwój Podstaw, Budowy, Eksploatacji i Badań Maszyn Roboczych Ciężkich – w tym Budowlanych. Zakopane 1994.
- [8] Bednarski S., Cink J., Wolski T.: „Stałościennione układy napędowe”. VI Konferencja Rozwój Podstaw, Budowy, Eksploatacji i Badań Maszyn Roboczych Ciężkich – w tym Budowlanych. Zakopane 1993.

- [9] Bednarski S., Cink J.: „Kształtowanie toru ruchu ładunku hydraulicznego żurawia portowego ze sterowaniem wtórnym”. II Konferencja Okrętownictwo i Oceanotechnika. Międzyzdroje 1995.
- [10] Bednarski S., Cink J.: „The Hydrostatic Hoisting Winch with Primary and Secondary Control”. EUROCRANE '95, 5th International Conference of Cranes and Textile Machines. Gdańsk 1996.
- [11] Bednarski S.: „Wpływ parametrów zespołu zmiany wydajności pompy na własności dynamiczne generatora stałego ciśnienia”. Praca doktorska. Łódź 1996.
- [12] Cannon M. D., Cullum C. D. jr, Polak E.: „Sterowanie optymalne i programowanie matematyczne”. WNT, Warszawa 1975.
- [13] Cannon R. H. jr: „Dynamika układów fizycznych”. WNT, Warszawa 1973.
- [14] Cink J., Halusiak S.: „Optymalne sterowanie rozruchem wciągarki hydrostatycznej”. III Konferencja Okrętownictwo i Oceanotechnika. Międzyzdroje 1997.
- [15] Cink J., Saryusz-Wolski T., Tomczyk J.: „Stanowisko do badań mechanizmów z przekładnią hydrostatyczną”. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, Nr 5-6/1987. Wrocław 1987.
- [16] Cink J., Tomczyk J., Wolski T.: „Hydrostatyczne układy napędowe maszyn roboczych”. Skrypt. Wydawnictwa Politechniki Łódzkiej. Łódź 1993.
- [17] Cink J., Tomczyk J., Wolski T.: „Model i badania symulacyjne mechanizmu jazdy maszyny roboczej z silnikiem spalinowym i przekładnią hydrostatyczną”. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika, zeszyt 99. Gliwice 1990.
- [18] Cink J., Tomczyk J., Wolski T.: „Przewidywane kierunki rozwoju sterowania cyklami pracy maszyn dźwigowych”. Biuletyn Techniczny OBRDiUT „DETRANS”, Nr 1-4/1990. Bytom 1990.
- [19] Cink J., Tomczyk J., Wolski T.: „Układ sterowania przekładnią hydrostatyczną mechanizmu jazdy maszyny roboczej”. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, Nr 1/1989. Wrocław 1989.
- [20] Cink J., Tomczyk J.: „Rozwiązanie podstawowych problemów transportu wiotko podwieszonych ładunków suwnicami sterowanymi

- numerycznie". II Międzynarodowa Konferencja Napędy Maszyn Transportowych. Ustroń, październik 1998.
- [21] Cink J., Tomczyk J.: „Zakłócenia działaniem wiatru w automatycznym sterowaniu maszyn roboczych”. Problemy Maszyn Roboczych, Komitet budowy Maszyn PAN, Z. 13. Warszawa 1999.
- [22] Cink J.: „Automatyczny układ pozycjonowania mostu suwnicy doświadczalnej”. Maszyny Dźwigowo-Transportowe, Nr 1/1993, OBRDiUT „DETRANS”. Bytom 1993.
- [23] Cink J.: „Minimalizacja wahań ładunku w mechanizmie jazdy suwnicy pomostowej”. Rozwój Podstaw, Budowy, Eksploatacji i Badań Maszyn Roboczych Ciężkich – w tym Budowlanych. Prace Naukowe Centralnego Programu Badań Podstawowych Nr 02.05. Warszawa 1989.
- [24] Cink J.: „Minimization of Load Oscillations over the Duty Motion of the Travelling Mechanism of Overhead Crane”. Archiwum Budowy Maszyn, Vol. XL, 1993, 3-4. Warszawa 1993.
- [25] Cink J.: „Model i badania symulacyjne mechanizmu jazdy mostu suwnicy z napędem elektrohydrostatycznym”. Przegląd Mechaniczny, Nr 23-24/1991. Warszawa 1991.
- [26] Cink J.: „Próba optymalizacji rozruchu wciągarki z przekładnią hydrostatyczną”. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, Nr 3/1988. Wrocław 1988.
- [27] Cink J.: „Tłumienie wahań ładunku w systemie automatycznego sterowania suwnicą”. VI Konferencja Naukowa Sterowanie, Napęd, Wytrzymałość Zmęczeniowa i Projektowanie Maszyn Budowlanych. Rynia k/Warszawy 1994.
- [28] Cink J.: „Wpływ przebiegu wydajności pompy układu hydrostatycznego na dynamikę rozruchu mechanizmu podnoszenia”. Praca doktorska. Łódź 1983.
- [29] Garbacik A. i inni: „Kierunki rozwoju napędów i konstrukcji maszyn roboczych”. Fluid Power Net Publication, Kraków 1999.
- [30] Grudziecki J., Kosucki A., Malenta P., Uciński J.: „Analiza parametryczna modelu mechanizmu jazdy suwnicy sterowanej programowo”. X Konferencja Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych. Zakopane 1997.

- [31] Kaczorek T.: „Teoria sterowania”. PWN, Warszawa 1981.
- [32] Konopka S., Krasucki J., Kuczmarowski F., Przychodzień T.: „Próba określenia stanu automatyzacji maszyn do prac ziemnych”. VI Konferencja Naukowa Sterowanie, Napęd, Wytrzymałość Zmęczeniowa i Projektowanie Maszyn Budowlanych. Rynia k/Warszawy 1994.
- [33] Kosucki A., Malenta P.: „Analiza parametryczna układu sterowania hydrostatycznym napędem jazdy suwnicy pomostowej”. IX Konferencja Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych. Zakopane 1996.
- [34] Kosucki A., Wolski T.: „Badania symulacyjne mechanizmu jazdy suwnicy pomostowej z kompensacją ukosowania”. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, Nr 6/1991. Wrocław 1991.
- [35] Kosucki A.: „Badania kompensacji ukosowania suwnicy z hydrostatycznym napędem mechanizmu jazdy. Praca doktorska. Łódź 1998.
- [36] Leyko J.: „Dynamika układów materialnych”. PWN, Warszawa 1961.
- [37] Leyko J.: „Mechanika ogólna”. PWN, Warszawa 1968.
- [38] Lipski J.: „Napędy i sterowania hydrauliczne”. WKŁ, Warszawa 1977.
- [39] Malenta P., Kosucki A., Tomczyk J.: „Zastosowanie stacji akwizycji danych Keithley w pracach badawczych”. IV Ogólnopolska Konferencja Maszyn Włókienniczych i Dźwigowych. Bielsko-Biała 1993.
- [40] Markusik S.: „Suwnice sterowane komputerem”. Biuletyn Techniczny OBRDiUT „DETRANS”, Nr 1-4/1990. Bytom 1990.
- [41] Osiński Z., Wróbel J.: „Teoria konstrukcji maszyn”. PWN, Warszawa 1982.
- [42] Parszewski Z., Roszkowski M.: „Podstawy automatyki dla mechaników”. PWN, Warszawa 1976.
- [43] Pełczewski W., Krynce M.: „Metoda zmiennych stanu w analizie układów napędowych”. WNT, Warszawa 1984.

- [44] Pełczewski W.: „Teoria sterowania”. WNT, Warszawa 1980.
- [45] Piątkiewicz A. Sobolski R.: „Dźwignice”. WNT, Warszawa 1977.
- [46] Piątkiewicz A., Tomczyk J.: „Problemy automatyzacji maszyn roboczych”. Problemy Maszyn Roboczych, Komitet budowy Maszyn PAN, Z. 1, Vol. 1. Warszawa 1993.
- [47] Pizoń A., Sikora K.: „Identyfikacja modeli matematycznych pewnego elektrohydraulicznego obiektu regulacji”. VI Konferencja Naukowa Sterowanie, Napęd, Wytrzymałość Zmęczeniowa i Projektowanie Maszyn Budowlanych. Rynia k/Warszawy 1994.
- [48] Pizoń A.: „Elektrohydrauliczne analogowe i cyfrowe układy automatyki”. WNT, Warszawa 1995.
- [49] Pizoń A.: „Napędy hydrauliczne regulowane mikroprocesorowo”. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, Nr 6/1991. Wrocław 1991.
- [50] Schmitt A.: „Vademecum hydrauliki”. REXROTH, 1988.
- [51] Stryczek S. „Napęd Hydrostatyczny”. Tom 1, 2. WNT, Warszawa 1990.
- [52] Takahashi Y., Rabins M. J., Auslander D. M.: „Sterowanie i systemy dynamiczne”. WNT, Warszawa 1976.
- [53] Tomczyk J. i inni: „Automatyzacja sterowania suwnicy do przeładunku kontenerów”. Prace dla Komitetu Badań Naukowych. OBRDiUT „DETRANS”- Bytom, Politechnika Łódzka, 1994.
- [54] Tomczyk J. i inni: „Badania dynamiki maszyn dźwigowo transportowych sterowanych za pomocą mikroprocesorów”. Prace dla Komitetu Badań Naukowych. Łódź, 1997.
- [55] Tomczyk J. i inni: „Badania możliwości odzyskania energii w nawrotnych mechanizmach maszyn roboczych z napędem hydrostatycznym”. Sprawozdanie Centralnego Programu Badań Podstawowych Nr 02.05. Łódź, 1990.
- [56] Tomczyk J. i inni: „Eliminacja wahań ładunku i pozycjonowanie dźwignic o ruchach obrotowych i wypadowych sterowanych za pomocą mikroprocesorów”. Prace dla Komitetu Badań Naukowych. Łódź, 1999.

- [57] Tomczyk J., Cink J., Kosucki A.: „Badania podstawowych problemów automatyzacji maszyn roboczych”. Materiały VII Konferencji Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych. Zakopane 1994.
- [58] Tomczyk J., Cink J., Wolski T.: „Kierunki badań dla rozwoju sterowania pracą maszyn roboczych” V Konferencja Rozwój Podstaw, Budowy, Eksploatacji i Badań Maszyn Roboczych Ciężkich – w tym Budowlanych. Zakopane 1992.
- [59] Tomczyk J., Cink J.: „Badania dynamiki jako podstawa wspóczesnego projektowania hydrostatycznych układów napędowych maszyn”. Konferencja Napęd Hydrostatyczny Maszyn – Rozwój i Wytwarzanie. Gdańsk 1999.
- [60] Tomczyk J., Cink J.: „The optimization of the flexibly suspended loads transport by microprocessor controlled overhead cranes”. Conference OPTI '99. Orlando, Florida, USA 1999.
- [61] Tomczyk J., Kosucki A., Malenta P.: „Automatycznie sterowana suwnica eksperymentalna”. Materiały VI Konferencji Naukowej Sterowanie, Napęd, Wytrzymałość Zmęczeniowa i Projektowanie Maszyn Budowlanych. Rynia k/Warszawy 1994.
- [62] Tomczyk J., Wolski T., Kosucki A.: „Experimental and Simulation Tests of Hydrostatic Drive of Overhead Crane Travelling Mechanism with Bevel Angle Compensation”. Third International Conference on Fluid Power Transmission and Control. Hangzhou, China 1993.
- [63] Tomczyk J., Wolski T., Kosucki A.: „Układ kompensacji ukosowania suwnicy pomostowej”. VI Konferencja Rozwój Podstaw Budowy Eksploatacji i Badań Maszyn Roboczych Ciężkich - w tym Budowlanych. Zakopane 1993.
- [64] Tomczyk J.: „Modele dynamiczne elementów i układów napędów hydrostatycznych”. WNT, Warszawa 1999.
- [65] Tomczyk J.: „Tendencje rozwojowe w budowie dźwignic i maszyn transportowych”. Problemy Maszyn Roboczych, Komitet Budowy Maszyn PAN, Z. 12. Warszawa 1998.
- [66] Tomczyk J.: „Własności napędowe i dynamiczne podstawowych mechanizmów dźwignic z napędem elektrohydraulicznym”. Praca

- habilitacyjna. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej Nr 581/126. Łódź 1990.
- [67] Uciński J. i inni: „Badania teoretyczne i doświadczalne możliwości zmniejszania obciążeń dynamicznych w układach napędowych nawrotnych mechanizmów dźwignic”. Sprawozdanie Centralnego Programu Badań Podstawowych Nr 03.05. Łódź 1990.
- [68] Verschoof J.: „Cranes – Design, Practice, and Maintenance”. Professional Engineering Publishing. Great Britain 2000.
- [69] Węgrzyn S.: „Podstawy automatyki”. PWN, Warszawa 1974.
- [70] Wolski R.: „Pomiary położenia w automatyzacji dźwignic”. Maszyny Dźwigowo-Transportowe, Nr 1/1993, OBRDiUT „DETRANS”. Bytom 1993.
- [71] Wolski T., Tomczyk J., Cink J.: „Modelling and Control on a Hydrostatic Transmission for the Travelling Mechanism of an Overhead Crane”. Fourth Bath International Fluid Power Workshop on Systems, Modelling and Control. Bath 1991.
- [72] Wolski T.: „Badania symulacyjne mechanizmu jazdy suwnicy z napędem hydrostatycznym”. Sterowanie i Napęd Hydrauliczny, Nr 2/1991. Wrocław 1991.
- [73] Żelazny M.: „Podstawy automatyki”. PWN, Warszawa 1976.





## **CHARAKTERYSTYKA ZAWODOWA AUTORA**

Jacek Cink urodził się w roku 1950. Szkołę podstawową i II Liceum Ogólnokształcące im. R. Traugutta ukończył w Zgierzu składając egzamin dojrzałości w roku 1968. Studiował na Wydziale Mechanicznym Politechniki Łódzkiej. Dyplom magistra inżyniera mechanika uzyskał w roku 1974.

W tym samym 1974 roku rozpoczął pracę jako asystent w Zakładzie Maszyn Roboczych Ciężkich Instytutu Konstrukcji Maszyn Politechniki Łódzkiej pod opieką profesora Aleksiego Piątkiewicza oraz docenta Mieczysława Czyżewskiego. Jego zainteresowania ukierunkowane zostały na napędy hydrostatyczne maszyn roboczych, w szczególności dźwignic. Zaowocowały one obronioną w roku 1983 pracą doktorską pt. „Wpływ przebiegu wydajności pompy układu hydrostatycznego na dynamikę rozruchu mechanizmu podnoszenia”.

Od roku 1983 pracuje jako adiunkt w Instytucie Konstrukcji Maszyn. W latach osiemdziesiątych zajmował się modelowaniem dynamicznym mechanizmów maszyn roboczych oraz ich sterowaniami optymalnymi. Działalność naukowa w tym zakresie, zapoczątkowana przy pracy doktorskiej, rozwijała się wraz z rozpowszechnianiem się technik komputerowych. Brał udział w pracach naukowych Zakładu Maszyn Roboczych i Napędów Hydraulicznych w ramach Centralnego Programu Badań Podstawowych 02.05 oraz w realizacji projektów badawczych dotyczących mikroprocesorowego sterowania dźwignic. W opracowanej pod kierunkiem profesora Jerzego Tomczyka technologii transportu wiotko podwieszonych ładunków był odpowiedzialny za procedury wyznaczania sterowań optymalnych. Wniósł znaczący wkład w opracowanie modeli dynamicznych maszyn dźwigowych, ich mechanizmów oraz układów sterowania i regulacji, zarówno dla napędów elektromechanicznych i hydrostatycznych. Jest współrealizatorem koncepcji kompensacji zakłóceń wywołanych parciem wiatru na zawieszony na linach ładunek w pracy żurawia portowego.

Swoje osiągnięcia prezentował w czasopismach, zeszytach naukowych i materiałach konferencyjnych jako autor i współautor. Brał

udział w konferencjach krajowych i zagranicznych. W roku 1989 odbył miesięczny staż naukowy w Strathclyde University w Glasgow w Szkocji.

Przez cały czas prowadził aktywną działalność dydaktyczną. Zaczynał od ćwiczeń, projektowania i laboratoriów, obecnie prowadzi wykłady i jest promotorem prac dyplomowych na specjalności Napęd i Sterowanie Maszyn. Jest współautorem skryptu pt. „Hydrostatyczne układy napędowe maszyn roboczych” wydanego w roku 1993.

Współpracował przy realizacji zamówień przemysłu w zakresie ekspertyz, napraw oraz projektowania maszyn dźwigowych i ich napędów.